Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

С.А. Моисеев, Н.М. Суворов

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Рекомендовано УМО
по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 032100 (050201) — математика

Рязань 2006

ББК 22.1я73
М74

Печатается по решению редакционно-издательской секции физико-математического факультета совета Рязанского государственного университета им. С.А. Есенина.

Научный редактор *Н.И. Крючков*, канд. физ.-мат. наук, доц.
Рецензенты: *С.С. Волков*, д-р физ.-мат. наук, проф. (РГРТУ)
В.В. Миронов, д-р физ.-мат. наук, проф. (РГРТУ)

М74 **Моисеев, С.А.** Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. — 2-е изд., испр. и доп. / С.А. Моисеев, Н.М. Суворов; Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. – Рязань, 2006. – 128 с.

Задачник адресуется студентам и преподавателям математических и физико-математических факультетов университетов и педагогических вузов, а также учащимся старших классов и учителям математики. Он содержит индивидуальные и групповые задания и задания для семестровых экзаменов по алгебре и теории чисел.

Ключевые слова: *действительные, комплексные, рациональные, целые, натуральные числа; бинарные отношения и операции; группы, кольца, поля, векторные пространства; изоморфизм, гомоморфизм.*

ББК 22.1я73

© С.А. Моисеев, Н.М. Суворов
© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина», 2006

Предисловие

В традиционных математических курсах бытует более или менее устоявшееся представление о так называемых «стандартных» задачах, предназначенных для индивидуального решения каждым студентом. Обычные задачники, однако, не содержат нужного количества однородных задач.

Первая часть настоящего пособия предлагает 82 задания подобного рода, охватывающих весь курс алгебры и теории чисел; каждое дается в 30 вариантах. Работа с ними позволяет оперативно контролировать усвоение материала и в значительной степени решать проблему текущей обратной связи.

Работа в малых группах является перспективой педагогической технологией, развитие которой сдерживается отсутствием методического обеспечения. Вторая часть задачника частично восполняет этот пробел. Она содержит 37 заданий (по 6 вариантов), которые предназначены для углубления и конкретизации изучаемого материала, разбора «тонких» моментов теории. Выполнение этих заданий повышает степень качества учебного процесса. Большинство задач одного задания взаимно дополняют друг друга, что открывает дополнительные методические возможности. Более трети всех задач – школьные, повышенного уровня, они могут использоваться в работе с учащимися.

Третья часть задачника представляет собой систему заданий к семестровым экзаменам. Здесь собраны задачи теоретического характера. Их решение не связано с громоздкими вычислениями, но предполагает уверенное владение теорией. Некоторые задачи призваны осуществить классификацию изучаемых объектов, а также охарактеризовать их с разных сторон. Другие задачи являются необычными перефразировками решенных ранее, подготовленный студент их сразу узнает. Задачи третьей части предназначены главным образом для самостоятельного решения в период подготовки студентов к экзаменам.

В третьей части пособия даются методические указания.

Авторы выражают свою признательность алгебраистам РГУ, несколько лет использовавшим в учебном процессе прототип данного задачника и внесшим ценные предложения по его совершенствованию. Особая благодарность доценту Н.И. Крючкову — редактору настоящего издания, профессору А.Х. Назиеву, методические разработки которого использованы при составлении задач, а также доценту Г.В. Денисовой, дополнившей пособие новым заданием.

ЧАСТЬ 1

Система индивидуальных заданий

Перечень тем заданий

1. Операции над множествами.
2. Равносильные преобразования в алгебре логики.
3. Логическое следование.
4. Логически общезначимые формулы.
5. Логически не общезначимые формулы.
6. Запись определений и теорем в виде формул.
7. Необходимое и достаточное условия.
8. Бинарные отношения.
9. Отношения эквивалентности.
10. Разбиения множества.
11. Образы и прообразы множества при отображениях.
12. Метод математической индукции.
13. Решение системы линейных уравнений.
14. Исследование системы линейных уравнений.
15. Отыскание многообразия решений системы линейных уравнений.
16. Линейная зависимость и независимость системы векторов.
17. Ранг и базис системы векторов.
18. Умножение матриц.
19. Вычисление обратной матрицы.
20. Вычисление числовых определителей.
21. Вычисление определителей степени n.
22. Правило Крамера решения системы линейных уравнений.
23. Определение группы.
24. Подгруппы. Смежные классы и фактор-группы.
25. Циклические группы. Подгруппы циклической группы.
26. Гомоморфизмы групп.
27. Доказательство неизоморфности алгебр.
28. Свойства колец и полей.
29. Свойства упорядоченных колец и полей.
30. Определение кольца и поля.
31. Изоморфизм колец и полей.
32. Геометрическое изображение комплексных чисел.
33. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексных чисел.
34. Операции над комплексными числами.
35. Корни из комплексных чисел.
36. Примеры векторных пространств.
37. Векторные подпространства. Базис и размерность.
38. Координаты вектора в различных базисах.
39. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств.
40. Определение евклидова пространства.

41. Процесс ортогонализации системы векторов.
42. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция вектора.
43. Линейное отображение. Матрица линейного отображения.
44. Матрицы линейного оператора в различных базисах.
45. Ранг, дефект, образ, ядро линейного отображения.
46. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
47. Деление с остатком в $\boldsymbol{Z}$.
48. Систематические числа.
49. Делимость целых чисел. Деление с остатком.
50. Деление с остатком в кольце целых гауссовых чисел.
51. НОД. НОК. Линейная выражаемость НОД.
52. Простые и составные элементы кольца целых гауссовых чисел.
53. Взаимно простые числа. Сокращение дробей.
54. Операции над идеалами.
55. Числовые сравнения.
56. Полная и приведенная системы вычетов.
57. Сравнения I степени.
58. Системы сравнений I степени.
59. Неопределенные уравнения первой степени.
60. Представление рационального числа в виде конечной цепной дроби.
61. Представление конечной цепной дроби рациональным числом.
62. Представление квадратичной иррациональности в виде периодической цепной дроби.
63. Представление периодической цепной дроби в виде квадратической иррациональности.
64. Применение цепных дробей к решению сравнений I степени.
65. Сравнение высших степеней.
66. Порядок элемента. Первообразные корни.
67. Применение индексов к решению сравнений.
68. Деление многочлена на двучлен $x-\alpha$.
69. Выделение кратных множителей.
70. Интерполяционные многочлены.
71. Рациональные корни многочлена.
72. Метод Кронекера разложения на множители.
73. Разложение на неприводимые множители над $\boldsymbol{C}$ и над $\boldsymbol{R}$.
74. Корни многочленов над $\boldsymbol{R}$.
75. Выражение симметрического многочлена через элементарные симметрические + формулы Виета.
76. Результант многочленов.
77. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.
78. Простота составного алгебраического расширения поля.
79. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
80. Задача Чирнгауза.
81. Алгебраические числа.

Задание 1. Доказать:

1. $C\subset A \Rightarrow (A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$.
2. $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C) \Rightarrow C\subset A$.
3. $A\subset B\cup C \Rightarrow A\cap\overline{B}\subset C$.
4. $A\cap\overline{B}\subset C \Rightarrow A\subset B\cup C$.
5. $A\cup B = A\cap B \Rightarrow A = B$.
6. $A\cap B = B \Rightarrow B\subset A$.
7. $A\cup B = B \Rightarrow A\subset B$.
8. $A\subset B \Rightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$.
9. $A\subset B \Rightarrow A\backslash C\subset B\backslash C$.
10. $A\subset B \Rightarrow C\backslash B\subset C\backslash A$.
11. $A\cap(B\backslash A) = \varnothing$.
12. $(\overline{A}\cup B)\cap A = A\cap B$.
13. $\overline{A\backslash B} = \overline{A}\cup(B\cap A)$.
14. $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\backslash C$.
15. $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup(A\cap C)$.
16. $(A\cup B)\backslash C = (A\backslash C)\cup(B\backslash C)$.
17. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A$.
18. $A\backslash B = A\backslash(B\cap A)$.
19. $A\backslash(A\backslash B) = A\cap B$.
20. $(A\cup B)\cap A = A$.
21. $A\cap(B\backslash C) = (A\cap B)\backslash C$.
22. $A\cap(B\backslash C) = (A\cap B)\backslash(A\cap C)$.
23. $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)$.
24. $A\cup B = A\cup(B\backslash A)$.
25. $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A$.
26. $(A\backslash B)\cup(B\backslash A) = \varnothing \Rightarrow A = B$.
27. $(A\cup B)\backslash(A\cap B) = \varnothing \Rightarrow A = B$.
28. $A\cap B = \varnothing \Rightarrow (A\cup B)\backslash B = A$.
29. $(A\cup B)\backslash B = A \Rightarrow A\cap B = \varnothing$.
30. $A\backslash B = A \Rightarrow B\backslash A = B$.

Задание 2. Упростить с помощью равносильных преобразований.

1. $(X\to(X\to Y))\to(X\to Y)$.
2. $X\vee(X\wedge\overline{Y} \to \overline{X}\vee\overline{Y})\wedge(X\to Y)$.
3. $(Y\to Z)\to((X\to Y)\to(X\to Z))$.
4. $(X\to Y)\to((Y\wedge Z)\to(X\to Z))$.
5. $(X\to Y)\to(X\wedge Z\to Y\wedge Z)$.
6. $(X\wedge Z\to Y\wedge Z)\to(Y\to Z)$.
7. $(X\vee Y\to X\vee Z)\to X\vee(Y\to Z)$.
8. $X\vee Y\to((X\to Z)\to\overline{\overline{Y}\wedge\overline{Z}})$.
9. $(X\to Y)\to(X\vee Z\to Y\vee Z)$.
10. $(X\vee Y)\wedge(X\vee\overline{Y})\wedge(\overline{X}\vee Y)$.
11. $(X\wedge\overline{Y}\to X)\vee\overline{Y}\to X\wedge\overline{Y}$.
12. $\overline{X\wedge Y}\to\overline{X\vee Y}\vee\overline{X}\wedge Y$.
13. $\overline{X}\vee X\wedge Y\vee\overline{X}\wedge Y\wedge\overline{Z}\vee X\wedge Y\wedge Z$.
14. $(Z\to X)\to X\wedge Y\vee Y\wedge Z\vee X$.
15. $(X\to\overline{Y})\wedge\overline{X\wedge\overline{Y}}\vee X\wedge\overline{Y}\to(\overline{X}\to\overline{X}\wedge\overline{Y})$.
16. $(X\vee X\wedge Y\vee Y\wedge Z\vee\overline{X}\wedge Z)\wedge(X\vee Z)$.
17. $(X\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee Z)\vee(X\vee\overline{Y})\wedge(Y\vee Z)$.
18. $Y\vee(X\wedge Y\wedge\overline{Z}\vee\overline{X}\vee\overline{Y}\vee\overline{Z})\wedge X$.
19. $(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Z}\to X\vee Y)\wedge Z\to\overline{\overline{X}\wedge Y\wedge Z}$.
20. $(X\wedge Y\vee Z\vee(\overline{X}\vee\overline{Y})\wedge\overline{Z}\wedge(X\vee Z))\wedge(X\vee Z)$.

21. $\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z} \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}$.
22. $(\overline{X} \wedge Z \to X \wedge Y) \to \overline{Y} \wedge Z$.
23. $(X \wedge Y \to Z) \wedge (X \wedge \overline{Z} \to \overline{Y})$.
24. $(Y \to Z) \wedge (Z \to Y) \vee X \vee Y$.
25. $(X \wedge Y \wedge Z \to X \wedge Z) \wedge (\overline{Z \to Y} \vee Z)$.
26. $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y} \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Y \wedge Z \vee \overline{X} \wedge Y \wedge \overline{Z}$.
27. $(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z \to X \vee Y) \wedge \overline{Z} \to \overline{\overline{X} \wedge Y \wedge Z}$.
28. $(X \wedge Y \to Z) \wedge (\overline{Z} \to X \wedge Y)$.
29. $((X \to Y) \to ((X \to \overline{Y}) \to \overline{X})) \to X$.
30. $X \vee Y \to ((X \to Y) \to Y)$.

Задание 3. Является ли последняя формула следствием совокупности предыдущих формул?

1. $\overline{X} \vee Y \to Z,\ X \to Y \Rightarrow Z$.
2. $\overline{X \vee Y} \to (Z \wedge T),\ \overline{Z} \vee \overline{T} \Rightarrow X \vee Y$.
3. $X \vee Y \to (Z \to T),\ \overline{X} \wedge \overline{Y} \Rightarrow Z \wedge T$.
4. $X \to (Y \to Z),\ (\overline{X} \vee Z) \wedge (\overline{Z} \vee Y) \Rightarrow X$.
5. $X \wedge Y \to Z \wedge \overline{Y},\ \overline{Z} \vee Y \Rightarrow \overline{X} \vee \overline{Y}$.
6. $\overline{X} \to Y,\ \overline{Z} \vee \overline{Y},\ Z \Rightarrow X$.
7. $X \to (Y \vee Z),\ \overline{Y} \vee Z \Rightarrow X \wedge Y \vee Z$.
8. $X \wedge Y \vee Z \wedge T,\ X \to \overline{X} \Rightarrow Z$.
9. $\overline{X} \vee Y,\ \overline{Z} \vee \overline{Y} \Rightarrow X \to \overline{Z}$.
10. $X \to Y,\ X \to Z \Rightarrow X \to Y \wedge Z$.
11. $X \to Y,\ Z \to T,\ X \vee Z \Rightarrow Y \vee T$.
12. $X \to (Y \to Z),\ \overline{T} \vee X,\ Y \Rightarrow T \to Z$.
13. $X \to Z,\ Y \to Z \Rightarrow X \vee Y \to Z$.
14. $X \to Y,\ X \vee Z,\ \overline{T} \vee \overline{Z},\ T \Rightarrow Y$.
15. $X,\ Y,\ Z \wedge X \to \overline{Y} \Rightarrow \overline{Z}$.
16. $X,\ X \to Y,\ Y \Rightarrow X \vee Z \to Y$.
17. $X \wedge Y \to \overline{Z},\ \overline{X},\ Y \to Z \Rightarrow \overline{X \wedge Y}$.
18. $X \to (Y \to Z),\ \overline{T} \vee X,\ Y \Rightarrow T \to Z$.
19. $X \to Y,\ \overline{Y \wedge Z} \Rightarrow \overline{X}$.
20. $X \to Y,\ Z \to Y,\ T \to X \vee Z,\ T \Rightarrow Y$.
21. $X \vee Y \to Z \wedge T,\ Z \to U,\ \overline{U} \Rightarrow \overline{X}$.
22. $\overline{X} \vee Y,\ Z \to \overline{Y} \Rightarrow X \to \overline{Z}$.
23. $X \vee Y \to Z \wedge T,\ T \vee U \to V \Rightarrow X \to V$.
24. $X \to Y,\ Z \to T,\ X \vee Z \Rightarrow Y \wedge T$.
25. $(X \to Y) \wedge (Z \to T),\ T \wedge Y \to F,\ \overline{F} \Rightarrow \overline{X} \vee \overline{Z}$.
26. $X \to Y,\ Y \to Z,\ \overline{Z} \vee T,\ \overline{X} \to T \Rightarrow T$.

27. $X \leftrightarrow Y,\ Y \to Z,\ \overline{Z} \vee T,\ \overline{X} \to T \Rightarrow \overline{T}$.
28. $X \to Y,\ Y \to Z,\ \overline{X} \to T,\ T \to Z,\ Z \to U \Rightarrow U$.
29. $X \wedge Y \to Z,\ Z \wedge T \to U,\ F \to T \wedge \overline{T} \Rightarrow X \wedge Y \to \overline{F}$.
30. $X \to Y,\ Y \to Z,\ Z \to T,\ U \to X,\ Y \Rightarrow X$.

Задание 4. Доказать логическую общезначимость формулы. Запись формулы в виде $\varphi(x)$ означает, что x имеет свободные вхождения в формулу φ, запись вида φ означает, что x не имеет свободных вхождений в φ.

1. $((\forall x)\varphi(x) \to (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi(x) \to \psi(x))$.
2. $((\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\psi(x)) \to ((\forall x)\varphi(x) \to (\exists x)\psi(x))$.
3. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x) \to (\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$.
4. $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$.
5. $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi(x)) \to ((\forall x)\varphi(x) \to (\exists x)\psi(x))$.
6. $((\exists x)\varphi(x) \to (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi(x) \to \psi(x))$.
7. $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to ((\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists x)\psi(x))$.
8. $(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to ((\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall x)\psi(x))$.
9. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$.
10. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\exists x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x)$.
11. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\forall x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$.
12. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$.
13. $(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$.
14. $(\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x)$.
15. $(\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\forall x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$.
16. $(\forall x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$.
17. $(\exists x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \to (\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x))$.
18. $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x)\varphi(x) \vee \psi$.
19. $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x)\varphi(x) \to \psi)$.
20. $((\forall x)\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x)(\varphi(x) \to \psi)$.
21. $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \to \varphi \wedge (\exists x)\psi(x)$.
22. $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$.
23. $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\exists x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$.
24. $(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x) \to (\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$.
25. $(\exists x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x)$.
26. $(\forall x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\forall x)\psi(x))$.
27. $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\exists x)\varphi(x) \to \psi)$.
28. $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$.
29. $((\forall x)\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x)(\varphi(x) \to \psi)$.
30. $\psi \wedge (\exists x)\varphi(x) \to (\exists x)(\psi \wedge \varphi(x))$.

Задание 5. Доказать, что формула не является логически общезначимой.

1. $(\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))\to(\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x)$.
2. $((\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow(\forall x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$.
3. $(\exists x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
4. $(\forall x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
5. $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\psi(x))\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\psi(x)$.
6. $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\psi(x))\to(\exists x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
7. $(\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\psi(x)\to(\exists x)(\varphi(x)\wedge\psi(x))$.
8. $((\forall x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to((\forall x)\varphi(x)\to(\forall x)\psi(x))$.
9. $((\forall x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to((\exists x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))$.
10. $((\forall x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\to\psi(x))$.
11. $((\exists x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\to\psi(x))$.
12. $((\forall x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\to\psi(x))$.
13. $(\exists x)(\varphi(x)\wedge\psi(x))\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
14. $(\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
15. $(\exists x)\varphi(x)\wedge(\exists x)\psi(x)\to(\exists x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
16. $(\exists x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\wedge(\forall x)\psi(x)$.
17. $(\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))\to(\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x)$.
18. $(\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)\to(\exists x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x)$.
19. $(\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)$.
20. $(\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)\to(\forall x)(\varphi(x)\vee\psi(x))$.
21. $(\exists x)\varphi(x)\vee(\exists x)\psi(x)\to(\forall x)\varphi(x)\vee(\forall x)\psi(x)$.
22. $((\forall x)\varphi(x)\leftrightarrow(\forall x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$.
23. $(\exists x)(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))\to((\exists x)\varphi(x)\leftrightarrow(\forall x)\psi(x))$.
24. $(\exists x)(\varphi(x)\to\psi(x))\to((\exists x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))$.
25. $(\exists x)(\varphi(x)\to\psi(x))\to((\forall x)\varphi(x)\to(\forall x)\psi(x))$.
26. $((\exists x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\to\psi(x))$.
27. $((\forall x)\varphi(x)\to(\exists x)\psi(x))\to((\exists x)\varphi(x)\to(\forall x)\psi(x))$.
28. $((\forall x)\varphi(x)\to(\forall x)\psi(x))\to(\forall x)(\varphi(x)\to\psi(x))$.
29. $(\exists x)(\varphi(x)\to\psi(x))\to((\exists x)\varphi(x)\to\psi(x))$.
30. $(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)\to(\exists y)(\forall x)\varphi(x,y)$.

Задание 6. Записать определение или утверждение в виде формулы. Составить отрицание этой формулы.

1. Определение предела функции в точке.
2. Определение наибольшего значения функции на отрезке.
3. Определение максимума функции в точке.
4. Определение строго монотонной функции.
5. Определение четной функции.
6. Определение минимума функции в точке.
7. Определение нестрого монотонной функции.

8. Определение нечетной функции.
9. Определение периодичной функции.
10. Определение ограниченной функции.
11. Определение наименьшего значения функции на отрезке.
12. Определение НОД двух чисел.
13. Определение НОК двух чисел.
14. Определение нижней грани числового множества.
15. Определение верхней грани числового множества.
16. Определение сходящейся последовательности.
17. Определение непрерывной на отрезке функции.
18. Определение простого числа.
19. Определение нижней грани функции на отрезке.
20. Определение верхней грани функции на отрезке.
21. Уравнение $f(x) = 0$ имеет по крайней мере два корня.
22. Определение сходящейся последовательности.
23. Через две различные точки проходит в точности одна прямая.
24. Для любых двух чисел существует их НОД.
25. Для любых двух чисел существует их НОК.
26. Определение пересекающихся прямых.
27. Любые две различные прямые имеют не более одной общей точки.
28. Уравнение $f(x) = 0$ имеет не более двух корней.
29. Непрерывная на отрезке функция является ограниченной.
30. Сходящаяся последовательность является ограниченной.

Задание 7. Указать условие и заключение. Переформулировать утверждение.

1. Четырехугольник является прямоугольником тогда, когда две его противоположные стороны и три его угла равны.
2. Сумма двух целых чисел является четным числом только если каждое слагаемое четно.
3. Чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно, чтобы его диагонали были перпендикулярны.
4. Чтобы четырехугольник имел ось симметрии, необходимо, чтобы он был ромбом.
5. Четырехугольник является прямоугольником только тогда, когда один из его углов равен 90°, а две противоположные стороны равны.
6. Четырехугольник $ABCD$, у которого $AC = BD$, $\angle A = \angle C = 90°$, является прямоугольником.
7. Четырехугольник является квадратом тогда, когда он имеет центр симметрии.
8. Треугольник является прямоугольным только тогда, когда квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других сторон.
9. Последовательность ограниченная, если только она имеет предел.
10. Чтобы $\frac{2t}{t^2+1}$ было иррациональным, необходимо, чтобы t было иррациональным.

11. Иррациональность числа $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ есть достаточное условие для иррациональности числа t.
12. Четырехугольник, имеющий центр симметрии и ось симметрии, является прямоугольником.
13. Равенство двух фигур есть достаточное условие их равновеликости.
14. Чтобы функция была дифференцируемой в точке, достаточно, чтобы она была непрерывной в этой точке.
15. Чтобы $A \cap B = B$, необходимо, чтобы $A \subset B$.
16. Чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы он имел прямой угол и ось симметрии.
17. Четырехугольник является прямоугольником тогда, когда он имеет ось симметрии и два прямых смежных угла.
18. Четырехугольник является прямоугольником, если только его диагонали равны.
19. Если два прямоугольника равновелики, то они равны.
20. Четырехугольник имеет ось симметрии и два прямых угла, если только он является прямоугольником.
21. Две подобные фигуры равновелики только тогда, когда они равны.
22. Равенство двух противоположных сторон четырехугольника есть достаточное условие того, что четырехугольник является параллелограммом.
23. Чтобы четырехугольник являлся прямоугольником, достаточно, чтобы он имел ось симметрии и три равных угла.
24. Чтобы четырехугольник имел равные диагонали и ось симметрии, необходимо, чтобы он был прямоугольником.
25. Существование вписанной в четырехугольник окружности – достаточный признак ромба.
26. Чтобы параллелограмм был ромбом, достаточно, чтобы он имел ось симметрии.
27. Треугольник является остроугольным тогда, когда квадрат одной из его сторон меньше суммы квадратов двух других сторон.
28. Два многоугольника равновелики тогда, когда их можно разбить на несколько равных между собой треугольников.
29. Чтобы вокруг пирамиды можно было описать сферу, необходимо, чтобы вокруг многоугольника, лежащего в основании пирамиды, можно описать окружность.
30. Чтобы x^2 был отрицательным, достаточно, чтобы $x^2+1=0$.

Задание 8. Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, линейность, всюду определенность, инъективность, сюръективность, функциональность) обладает данное отношение?

1. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow |a| \le |b|$.
2. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a = b \vee a = 3b$.
3. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow |a| = |b|$.
4. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow a+b$ четное.
5. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow a+b$ нечетное.
6. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow ab$ нечетное.
7. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}$ четное.
8. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow (a+b) \vdots 3$.
9. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow (a-b) \vdots 5$.
10. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow (a-b) \in \boldsymbol{Q}$.
11. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow b \vdots a$.
12. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin a = \sin b$.
13. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
14. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin a = \cos b$.
15. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow |a-b| < 5$.
16. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow (a^2+b^2) > 4$.
17. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow ab > 0$.
18. На $\boldsymbol{Z}$ $a\rho b \Leftrightarrow 3(a-b) \vdots 19$.
19. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a > b+3$.
20. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow |a| = b$.
21. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin a = -\sin b$.
22. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin a > \sin b$.
23. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin \dfrac{\pi a}{2} = \sin \dfrac{\pi b}{2}$.
24. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
25. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 b = 1$.
26. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow 3^a = 2^b$.
27. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a > b+2$.
28. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow a^2+b^2 \le 9$.
29. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow 2a > b+1$.
30. На $\boldsymbol{R}$ $a\rho b \Leftrightarrow 2a > \cos b$.

Задание 9. Отношение на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано набором пар. Выяснить, является ли оно отношением эквивалентности. Если нет, привести опровергающий пример. Если да, выписать соответствующее ему разбиение множества A.

1. (1; 1), (5; 5), (2; 4), (4; 2), (5; 3), (3; 5), (2; 2), (3; 3), (4, 4).
2. (1; 3), (3; 1), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (2; 4).
3. (1; 1), (2; 2), (2; 1), (3; 4), (3; 5), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (1; 2), (4; 3), (4; 5), (5; 3), (5; 4).
4. (5; 1), (2; 3), (2; 4), (4; 3), (3; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (3; 2), (4; 2), (4; 4), (5; 5), (1; 5).
5. (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5).
6. (5; 5), (1; 4), (4; 1), (1; 5),(1; 1), (5; 1), (4; 5), (2; 2), (4; 4), (5; 4), (2; 3), (3; 2).
7. (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (2; 3), (3; 2).
8. (2; 5), (1; 1), (2; 2), (5; 5), (5; 2), (3; 3), (4; 4).
9. (3; 4), (4; 1), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (1; 3), (1; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 3), (2; 5), (5; 2).
10. (1; 3), (4; 1), (1; 4), (3; 3), (4; 4), (1; 1), (2; 2), (5; 5), (3; 2), (2; 3).
11. (3; 5), (4; 1), (4; 3), (4; 5), (5; 1), (3; 3), (5; 5), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (4; 4), (3; 1), (3; 4), (5; 3), (5; 4), (1; 1), (2; 2).
12. (5; 5), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (1; 1), (2; 2), (4; 4).
13. (5; 5), (2; 3), (3; 3), (4; 4), (2; 5), (3; 2), (3; 5), (5; 2), (1; 1), (2; 2), (5; 3).
14. (4; 4), (5; 5), (1; 5), (1; 1), (3; 3), (1; 4), (5; 4), (4; 1), (2; 2), (4; 5).
15. (1; 4), (5; 4), (1; 1), (2; 2), (5; 1), (5; 5), (1; 5), (4; 1), (3; 3), (4; 4), (4; 5).

16. (5; 2), (1; 3), (1; 1), (5; 5), (2; 5), (2; 2), (4; 4), (3 ;1), (3; 3).
17. (2; 4), (2; 5), (1; 1), (5; 5), (1; 2), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 5), (5;1), (5; 2), (5; 4), (4; 4).
18. (3; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 1), (2; 4), (2; 5), (4; 1), (4; 2), (4; 5), (1; 1), (5; 2), (5; 4), (4; 4), (5; 5), (1; 2).
19. (4; 1), (3; 3), (2; 5), (4; 4), (5; 2), (1; 1), (2; 2), (5; 5), (1, 4).
20. (1; 1), (2; 2), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (4; 2), (3; 5), (4; 4), (5; 5), (2; 4), (5; 1), (5; 3).
21. (3; 3), (2; 2), (1; 1), (1; 4), (4; 1), (2; 3), (4; 4), (5; 5), (3; 2).
22. (3; 4), (4; 3), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1), (2; 5), (5; 2), (1; 1), (4; 4), (5; 5), (1; 5), (5; 1).
23. (4; 2), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (3; 3), (1; 5), (3; 1), (4; 4), (5; 5), (2; 4), (1; 1), (2; 2).
24. (4; 1), (3; 3), (4; 4), (2; 3), (1; 1), (2; 2), (5; 5), (1; 4), (3; 2), (2; 4), (4; 2).
25. (3; 3), (1; 2), (2; 2), (1; 3), (5; 5), (1; 4), (1; 1), (2; 1), (2; 3), (4; 4), (2; 4), (3; 1), (3; 2), (3; 4), (4; 1), (4; 2), (4; 3).
26. (5; 1), (5; 3), (3; 5), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (3; 4), (4; 3), (4; 4), (5; 5), (1; 5).
27. (2; 2), (5; 5), (1; 5), (1; 1), (5; 1), (3; 3), (4; 4), (3; 4), (4; 3).
28. (2; 1), (2; 3), (1; 1), (3; 1), (2; 2), (3; 3), (3; 2), (4; 4), (5; 5), (1; 2), (1; 3).
29. (2; 2), (5; 5), (1; 4), (3; 3), (1; 1), (4; 4), (4; 1).
30. (1; 1), (2; 2), (4; 4), (5; 5), (1; 4), (4; 1).

Задание 10. Дано семейство подмножеств множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Является ли это семейство разбиением множества A? Если нет, объяснить, почему. Если да, выписать в виде совокупности пар соответствующее этому разбиению отношение эквивалентности.

1. {3}, {1, 2, 4, 5}.
2. {3}, {1, 4}, {2, 5}.
3. {1, 2, 3}, {3, 4, 5}.
4. {5}, {1, 4}, {2, 3}.
5. {4}, {2, 5}, {1, 3}.
6. {1, 4, 5}, {2}, {3}.
7. {1, 4}, {2, 3}.
8. {2, 3, 5}, {1}, {4}.
9. {1, 3}, {2, 4}, {3, 5}.
10. {1, 3, 4, 5}, {2}.
11. {2}, {3}, {4}, {1, 2, 5}.
12. {4}, {5}, {1, 2, 3}.
13. {2}, {3}, {5}, {1, 4}.
14. {2}, {1, 5}, {3, 4}.
15. {1, 4}, {2, 5}, {4}.
16. {5}, {1, 2, 3, 4}.
17. {3, 4}, {1, 4}, {2, 5}.
18. {3, 4}, {1, 2, 5}.
19. {2}, {3}, {1, 5}.
20. {1, 2, 3, 4, 5}.
21. {1}, {3}, {4}, {5}, {2, 4}.
22. {1}, {2, 5}, {3}, {4}.
23. {1, 3, 4}, {2, 5}.
24. {1}, {2, 3}, {4}, {5}.
25. {2, 4}, {1, 3, 5}.
26. {1, 5}, {2, 3, 4}.
27. {1}, {2}, {3}, {4}, {5}.
28. {2}, {3}, {1, 3, 5}.
29. {1,2}, {3, 4, 5}.
30. {1}, {2, 4}, {3, 5}.

Задание 11

1–17. Доказать:

1. $(\forall A)(f[A\cup B] = f[A]\cup f[B])$.
2. $(\forall A)(f^{-1}[A\cup B] = f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B])$.
3. $(\forall A)(f^{-1}[A\cap B] = f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B])$.
4. $(\forall A)(f^{-1}[A\setminus B] = f^{-1}[A]\setminus f^{-1}[B])$.
5. $(\forall A)(f[A\setminus B] \supset f[A]\setminus f[B])$.
6. $(\forall A)(f[A]\cap f[B] = \varnothing \to A\cap B = \varnothing)$.
7. $(\forall A)(A\cap B = \varnothing \to f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B] = \varnothing)$.
8. $(\forall A)(f[f^{-1}[A]] \subset A)$.
9. f – инъекция $\Rightarrow (\forall A)(f^{-1}[f[A]] = A)$.
10. f – сюръекция $\Rightarrow (\forall A)(f[f^{-1}[A]] = A)$.
11. f – сюръекция $\Rightarrow (\forall A)(A \subset f[f^{-1}[A]])$.
12. f – инъекция $\Rightarrow (\forall A)(f^{-1}[f[A]] \subset A)$.
13. f – сюръекция $\Rightarrow (\forall A)(A \subset f[f^{-1}[A]])$.
14. f – инъекция $\Rightarrow (A\cap B = \varnothing \Rightarrow$
15. $\Rightarrow f[A]\cap f[B] = \varnothing)$.
16. f – сюръекция $\Rightarrow (f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B] =$
17. $= \varnothing \Rightarrow A\cap B = \varnothing)$.
18. $(f\colon X\to X) \wedge (\forall A)(f[A] \subset A) \Rightarrow f = \varepsilon_X$.
19. $(f\colon X\to X) \wedge (\forall A)(A \subset f[A]) \Rightarrow f = \varepsilon_X$.

18–30. Для функции $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ определить истинностное значение высказывания:

1. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $(\forall A)(f^{-1}[f[A]] = A)$.
2. $f(x) = x^2$, $(\forall A)(f[f^{-1}[A]] = A)$.
3. $f(x) = x^3$, $(\forall A)(\forall B)(f[A]\cap f[B] = f[A\cap B])$.
4. $f(x) = x^2$, $(\forall A)(\forall B)(f[A]\setminus f[B] = f[A\setminus B])$.
5. $f(x) = \sin x$, $(\forall A)(\forall B)(f[A]\cap f[B] = f[A\cap B])$.
6. $f(x) = 2^x$, $(\forall A)(\forall B)(f[A]\cap f[B] = f[A\cap B])$.
7. $f(x) = \log_2 x$, $(\forall A)(f^{-1}[f[A]] = A)$.
8. $f(x) = \cos x$, $(\forall A)(\forall B)(A\cap B = \varnothing \to f[A]\cap f[B] = \varnothing)$.
9. $f(x) = x^2$, $(\forall A)(\forall B)(f[A]\setminus f[B] = f[A\setminus B])$.
10. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $(\exists A)(\exists B)(A\cap B = \varnothing \wedge f[A]\cap f[B] \neq \varnothing)$.
11. $f(x) = -x^2+3x-2$, $(\exists A)(\exists B)(f[A\cap B] \neq f[A]\cap f[B])$.
12. $f(x) = x^2$, $(\exists A)(f^{-1}[f[A]] \neq A)$.
13. $f(x) = x^4$, $(\exists A)(f[f^{-1}[A]] \neq A)$.

Задание 12. Доказать методом математической индукции.

1. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.
2. $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\ldots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$, $n\geq 2$.
3. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \vdots 9$.
4. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.
5. $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.
6. $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 8n \Rightarrow u_n = (2n-1)^2$.
7. $7^{n+1} + 8^{2n-1} \vdots 57$.
8. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
9. $3^{2n+2} - 8n - 9 \vdots 64$.
10. $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1} \vdots 19$.

11. $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$ ⋮ 19.

12. $7^{2n}-4^{2n}$ ⋮ 33.

13. $5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}$ ⋮ 19.

14. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

15. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

16. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$.

17. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$ $(n>1)$.

18. $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ $(n>1,\ \alpha>-1)$.

19. $-1+3-5+7-\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$.

20. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

21. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

22. $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+n(n-1)^2+(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 4}$.

23. $k!+k\cdot k!+(k+1)(k+1)!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!$, $(k<n)$.

24. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

25. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

26. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

27. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

28. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

29. n^3+11n ⋮ 6.

30. $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, если $a+b>0$.

Задание 13. Решить систему линейных уравнений. Система задается своей расширенной матрицей.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$.

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 22 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 2 \end{array}\right)$.

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right)$.

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$

5. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 24 & 14 & 30 & 40 & 41 & 28 \\ 36 & 21 & 45 & 61 & 62 & 43 \\ 48 & 28 & 60 & 82 & 83 & 58 \\ 60 & 35 & 75 & 99 & 102 & 69 \end{array}\right).$

6. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & -18 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 9 & -27 & 0 \\ 2 & -7 & 7 & 16 & -48 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right).$

7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -11 & -4 \end{array}\right).$

8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \end{array}\right).$

9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 14 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & -12 \end{array}\right).$

10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & -1 \\ 6 & 13 & -10 & -7 & 3 \\ 2 & -23 & 12 & -13 & -5 \\ 1 & 9 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right).$

11. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -10 & 2 \end{array}\right).$

12. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & -2 & 3 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 12 & 13 & -1 & 5 & 26 \end{array}\right).$

13. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right).$

14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right).$

15. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & -16 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & -26 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & -5 \end{array}\right).$

16. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right).$

17. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right).$

18. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right).$

19. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{array}\right).$

20. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 11 & 9 & 3 \end{array}\right).$

21. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 20 & 9 & -1 & 18 \end{array}\right).$

22. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \\ 6 & 8 & 2 & 7 & 9 \end{array}\right).$

23. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \\ 4 & -6 & 18 & 25 & 2 \end{array}\right).$

24. $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 9 & -3 & 6 & 15 & -3 \end{array}\right).$

25. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \\ 6 & -3 & 33 & -72 & 39 \end{array}\right).$

26. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 6 \end{array}\right).$

27. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$

28. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$

29. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right).$

30. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 20 \end{array}\right).$

Задание 14. Исследовать систему линейных уравнений.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 5 & -3 & k \end{array}\right).$

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ k & 9 & 8 & 7 & 1 \end{array}\right).$

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -8 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & -3 & -8 & 5 \\ 3 & -11 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & k & -1 & 2k & -k \end{array}\right).$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+k & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} k+3 & 2 & -1 & 4 & k \\ k & k-1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 11 & -10 \\ 1 & 4 & -1 & 18 & -18 \end{array}\right).$

6. $\left(\begin{array}{cccc|c} k+1 & 3 & 2 & 5 & k \\ k & 1 & 4 & 3 & k \\ k & 2 & -2 & 2 & k-1 \\ k+4 & k+7 & 2 & 12 & k-1 \end{array}\right).$

7. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & k+3 & 6 & 6 & k+1 \\ 3 & 6 & k+8 & 9 & k+2 \\ 3 & 6 & 9 & k+8 & k+2 \end{array}\right).$

8. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & k & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & k & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & k & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & k \end{array}\right).$

9. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & k \end{array}\right).$

10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & k & 9 \end{array}\right).$

11. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & k & 1 \\ 2 & 3 & k & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 7 & \frac{k}{2} \\ 2 & 3 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right).$

12. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & k \end{array}\right).$

13. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & k & 2 \end{array}\right).$

14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & k & 7 \end{array}\right).$

15. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ k & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right).$

16. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right).$

17. $\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k+1 & k^2 \end{array}\right).$

18. $\left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 1 & 1 & k^2+3k \\ 1 & k+1 & 1 & k^3+3k^2 \\ 1 & 1 & k+1 & k^4+3k^3 \end{array}\right).$

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & k \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right).$

20. $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right).$

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & -38 & 46 & 26 \\ 60 & k & 115 & 65 \\ 84 & -133 & 161 & 91 \end{array}\right).$

22. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$

23. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & k & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$

24. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 3 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$

25. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2k & 2-k & 1 & k \\ 2-k & 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k & 1 \end{array}\right).$

26. $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right).$

27. $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right).$

28. $\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & 1 & 1 & k & k^3 \end{array}\right).$

29. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{array}\right).$

30. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1-k & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1-k & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1-k & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 1-k & -3 \end{array}\right).$

Задание 15. Найти многообразие решений системы линейных уравнений.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 12 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 9 \end{array}\right).$

2. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{array}\right).$

3. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right).$

4. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$

5. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 1 \end{array}\right).$

6. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 4 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 4 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 16 \\ 6 & -3 & 33 & -72 & 36 \end{array}\right).$

7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & 15 & 6 \end{array}\right).$

8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & -5 \\ 4 & -6 & 18 & 25 & 5 \end{array}\right).$

9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 5 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 6 & 8 & 2 & 7 & 2 \end{array}\right).$

10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 12 \\ 1 & 20 & 9 & -1 & 12 \end{array}\right).$

11. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 11 & 9 & 2 \end{array}\right).$

12. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 15 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 9 \end{array}\right).$

13. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right).$

14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 13 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 23 \end{array}\right).$

15. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right).$

16. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 7 & 13 & 18 & 5 \\ 5 & 6 & 15 & 25 & 10 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right).$

17. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & -4 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right).$

18. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right).$

19. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 12 & 13 & -1 & 5 & 20 \end{array}\right).$

20. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & -3 & 9 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & -10 & 18 \end{array}\right).$

21. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -3 & -6 & 9 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & -1 \\ 6 & 13 & -8 & -9 & 19 \\ 2 & -23 & 12 & -13 & -21 \\ 1 & 9 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right).$

22. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & -8 \end{array}\right).$

23. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & 0 \end{array}\right).$

24. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & -11 & -9 \end{array}\right).$

25. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & -18 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 9 & -27 & 0 \\ 2 & -7 & 7 & 16 & -48 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)$.

26. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 24 & 14 & 30 & 40 & 41 & 8 \\ 36 & 21 & 45 & 61 & 62 & 12 \\ 48 & 28 & 60 & 82 & 83 & 16 \\ 60 & 35 & 75 & 99 & 102 & 20 \end{array}\right)$.

27. $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$.

28. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 14 & 19 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right)$.

29. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 22 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 2 \end{array}\right)$.

30. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 5 \\ 8 & -4 & 9 & 10 & 7 \end{array}\right)$.

Задание 16. Выяснить, образует ли система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независимую систему.

1. $a_1 = (1; -1; 2; -1)$,
   $a_2 = (2; 3; -1; 2)$,
   $a_3 = (4; 1; 3; 1)$.
2. $a_1 = (3; -4; 1; 2)$,
   $a_2 = (1; -1; -1; -1)$,
   $a_3 = (4; -3; 1; 2)$.
3. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
   $a_2 = (-1; -1; -1; 1)$,
   $a_3 = (1; 2; 3; -4)$.
4. $a_1 = (1; 2; -1; -2)$,
   $a_2 = (2; 3; 0; -1)$,
   $a_3 = (1; 2; 1; 4)$.
5. $a_1 = (4; 3; -1; 1)$,
   $a_2 = (2; 1; -3; 2)$,
   $a_3 = (1; -3; 0; 1)$.
6. $a_1 = (2; -1; 3; 4)$,
   $a_2 = (1; 2; -3; 1)$,
   $a_3 = (1; -3; 6; 3)$.
7. $a_1 = (2; 3; 5; 4)$,
   $a_2 = (1; -1; 2; 3)$,
   $a_3 = (1; -1; 1; -2)$.
8. $a_1 = (2; -1; 3; -2)$,
   $a_2 = (3; -1; 5; 4)$,
   $a_3 = (4; -2; 1; 3)$.
9. $a_1 = (3; 2; -5; 4)$,
   $a_2 = (3; -1; 3; -3)$,
   $a_3 = (3; 5; -3; 1)$.
10. $a_1 = (2; 2; 7; -1)$,
    $a_2 = (3; -1; 2; 4)$,
    $a_3 = (1; 1; 3; 1)$.
11. $a_1 = (2; 3; -4; -1)$,
    $a_2 = (1; -2; 1; 3)$,
    $a_3 = (5; -3; -1; 8)$.
12. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
    $a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
    $a_3 = (2; -5; 8; -3)$.
13. $a_1 = (2; -1; 3; 5)$,
    $a_2 = (4; -3; 1; 3)$,
    $a_3 = (3; -2; 3; 4)$.
14. $a_1 = (2; -1; 3; 5)$,
    $a_2 = (4; -3; 1; 3)$,
    $a_3 = (3; -2; 5; 4)$.
15. $a_1 = (8; 7; 4; 5)$,
    $a_2 = (3; 2; 1; 4)$,
    $a_3 = (2; 3; 1; -3)$.
16. $a_1 = (2; -3; 4; -5)$,
    $a_2 = (1; -2; 7; -8)$,
    $a_3 = (3; -4; 1; -2)$.

17. $a_1 = (5; -3; 2; 4)$,
$a_2 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_3 = (4; -3; -5; -7)$.
18. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
$a_3 = (3; -4; 1; 2)$.
19. $a_1 = (5; -4; -5; 2)$,
$a_2 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_3 = (4; -3; 1; 3)$.
20. $a_1 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_2 = (4; -3; 1; 3)$,
$a_3 = (7; -6; -7; 0)$.
21. $a_1 = (5; 2; -3; 1)$,
$a_2 = (4; 1; -2; 3)$,
$a_3 = (1; 1; -1; -2)$.
22. $a_1 = (1; 2; -2; 1)$,
$a_2 = (-3; 1; 2; -3)$,
$a_3 = (0; 7; -4; 0)$.
23. $a_1 = (1; 2; -2; -1)$,
$a_2 = (-1; 0; 2; 1)$,
$a_3 = (3; 6; 0; 4)$.
24. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (1; 2; 3; 4)$,
$a_3 = (-2; 0; 2; 4)$.
25. $a_1 = (1; -1; 1; -1)$,
$a_2 = (2; 0; 1; -1)$,
$a_3 = (3; -1; 1; -1)$.
26. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (2; 0; 1; -1)$,
$a_3 = (3; -4; 0; -1)$.
27. $a_1 = (2; 1; -2; -1)$,
$a_2 = (2; -5; -1; 3)$,
$a_3 = (-1; -1; -1; 1)$.
28. $a_1 = (4; 3; -1; 1)$,
$a_2 = (2; 1; -3; 2)$,
$a_3 = (1; -3; 0; 1)$.
29. $a_1 = (3; 2; -5; 4)$,
$a_2 = (3; -1; 3; -3)$,
$a_3 = (9; 3; -7; 5)$.
30. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
$a_3 = (2; -5; 8; -3)$.

Задание 17. Найти ранг системы векторов. Найти какой-нибудь базис системы и выразить оставшиеся векторы системы через этот базис.

1. $a_1 = (5; 2; -3; 1)$,
$a_2 = (4; 1; -2; 3)$,
$a_3 = (1; 1; -1; -2)$,
$a_4 = (3; 4; -1; 2)$.
2. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
$a_3 = (2; -5; 8; -3)$,
$a_4 = (3; -4; 1; 2)$.
3. $a_1 = (3; 2; -5; 4)$,
$a_2 = (3; -1; 3; -3)$,
$a_3 = (3; 5; -13; 11)$,
$a_4 = (9; 3; -7; 5)$.
4. $a_1 = (4; 3; -1; 1)$,
$a_2 = (2; 1; -3; 2)$,
$a_3 = (1; -3; 0; 1)$,
$a_4 = (1; 5; 2; -2)$.
5. $a_1 = (2; 1; -2; -1)$,
$a_2 = (-9; 5; -6; 21)$,
$a_3 = (2; -5; -1; 3)$,
$a_4 = (-1; -1; -1; 5)$.
6. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (2; 0; 1; -1)$,
$a_3 = (3; -4; 0; -1)$,
$a_4 = (13; -10; 3; -2)$.
7. $a_1 = (1; -1; 1; -1)$,
$a_2 = (2; 0; 1; -1)$,
$a_3 = (3; -1; 1; -1)$,
$a_4 = (4; -2; 1; -2)$.
8. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (1; 2; 3; 4)$,
$a_3 = (2; 0; -2; -4)$,
$a_4 = (0; 3; 6; -5)$.
9. $a_1 = (1; 2; -2; -1)$,
$a_2 = (-1; 0; 2; 1)$,
$a_3 = (0; 1; 0; 1)$,
$a_4 = (3; 6; 0; 4)$.
10. $a_1 = (1; 2; -2; 1)$,
$a_2 = (-3; 1; 2; -3)$,
$a_3 = (0; 7; -4; 0)$,
$a_4 = (0; 1; 2; 3)$.

11. $a_1 = (5; 2; -3; 1)$,
$a_2 = (4; 1; -2; 3)$,
$a_3 = (1; 1; -1; -2)$,
$a_4 = (3; 4; -1; 2)$.

12. $a_1 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_2 = (4; -3; 1; 3)$,
$a_3 = (4; -1; 15; 17)$,
$a_4 = (7; -6; -7; 0)$.

13. $a_1 = (5; -4; -5; 2)$,
$a_2 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_3 = (4; -3; 1; 3)$,
$a_4 = (7; -6; -7; 0)$.

14. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
$a_3 = (3; -4; 1; 2)$,
$a_4 = (5;26;-9;-12)$.

15. $a_1 = (5; -3; 2; 4)$,
$a_2 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_3 = (4;-3;-5;-7)$,
$a_4 = (1; 0; 7; 11)$.

16. $a_1 = (2; -3; 4; -5)$,
$a_2 = (1; -2; 7; -8)$,
$a_3 = (3; -4; 1; -2)$,
$a_4 = (4; -5; 6; -7)$.

17. $a_1 = (8; 7; 4; 5)$,
$a_2 = (3; 2; 1; 4)$,
$a_3 = (2; 3; 2; -3)$,
$a_4 = (1; -1; -1; 7)$.

18. $a_1 = (2; -1; 3; 5)$,
$a_2 = (4; -3; 1; 3)$,
$a_3 = (3; -2; 3; 4)$,
$a_4 = (4;-1; 15;17)$.

19. $a_1 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_2 = (2; 3; -4; 1)$,
$a_3 = (2; -5; 8; -3)$,
$a_4 = (5; 26; -9;-12)$.

20. $a_1 = (2; 3; -4; -1)$,
$a_2 = (1; -2; 1; 3)$,
$a_3 = (5; -3; -1; 8)$,
$a_4 = (3; 8; -9; -5)$.

21. $a_1 = (2; 2; 7; -1)$,
$a_2 = (3; -1; 2; 4)$,
$a_3 = (1; 1; 3; 1)$,
$a_4 = (-1; 7; 13; -9)$.

22. $a_1 = (3; 2; -5; 4)$,
$a_2 = (3; -1; 3; -3)$,
$a_3 = (3; 5; -13; 11)$,
$a_4 = (12; -1; 4; -5)$.

23. $a_1 = (2; -1; 3; -2)$,
$a_2 = (3; -1; 5; 4)$,
$a_3 = (4; -2; 1; 3)$,
$a_4 = (1; 0; 7; -1)$.

24. $a_1 = (2; 3; 5; 1)$,
$a_2 = (1; -1; 2; 5)$,
$a_3 = (3; 7; 8; -3)$,
$a_4 = (1; -1; 1; 3)$.

25. $a_1 = (2; -1; 3; -1)$,
$a_2 = (1; 2; -3; 2)$,
$a_3 = (5; -5; 12; -5)$,
$a_4 = (1; -3; 6; -3)$.

26. $a_1 = (4; 3; -1; 1)$,
$a_2 = (2; 1; -3; 2)$,
$a_3 = (1; -3; 0; 1)$,
$a_4 = (1; 5; 2; -2)$.

27. $a_1 = (1; 2; -1; -2)$,
$a_2 = (2; 3; 0; -1)$,
$a_3 = (1; 2; 1; 4)$,
$a_4 = (1; 3; -1; 0)$.

28. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (-1; -1; -1; 1)$,
$a_3 = (1; 2; 3; -4)$,
$a_4 = (2; 3; 4; 1)$.

29. $a_1 = (3; -4; 1; 2)$,
$a_2 = (1; -1; -1; -1)$,
$a_3 = (4; -3; 1; 2)$,
$a_4 = (1; -6; 1; 2)$.

30. $a_1 = (1; -1; 2; -1)$,
$a_2 = (2; 3; -1; 2)$,
$a_3 = (4; 1; 3; 1)$,
$a_4 = (-1; -9; 8; -7)$.

Задание 18. Перемножить матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^4.$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4.$

9. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ 16 & 11 & 15 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}^2$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

27. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание 19. Вычислить матрицу, обратную к данной матрице.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Задание 20. Вычислить значение определителя.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 2 & 100 & 4 & 0{,}08 \\ 1 & 300 & -6 & 0{,}02 \\ 3 & -200 & 2 & -0{,}02 \\ 2 & -100 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & 15 & 6 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

17. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$

21. $\begin{vmatrix} -12 & 9 & -5 & 9 \\ 23 & 18 & 11 & 29 \\ -20 & 21 & -8 & 23 \\ 43 & 37 & 21 & 59 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ 5 & -8 & -2 & -7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$

24. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$

27. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$

29. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & -12 & 2 \\ -10 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -1 \\ 10 & 15 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Задание 21. Вычислить значение буквенного определителя (если из задания неясно, каков порядок определителя, полагать его равным n).

1. $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ac & a & -b & 0 & \dots & 0 \\ ac^2 & ac & a & -b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ac^n & ac^{n-1} & ac^{n-2} & ac^{n-3} & \dots & a \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+x & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+x \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1)+1 & n(n-1)+2 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

12. $$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & .... & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1-n \end{vmatrix}.$$

13. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & -n \\ 1 & 1 & ... & -n & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & -n & ... & 1 & 1 \\ -n & 1 & ... & 1 & 1 \end{vmatrix}, n > 1.$$

14. $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

15. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

16. $$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & ... & a \\ a & a+1 & a & ... & a \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & a+1 \end{vmatrix}.$$

17. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

18. $$\begin{vmatrix} a & a & a & ... & a \\ a & 0 & a & ... & a \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & 0 \end{vmatrix}.$$

19. $$\begin{vmatrix} 0 & a & a & ... & a \\ a & 0 & a & ... & a \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & a & a & ... & 0 \end{vmatrix}.$$

20. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & ... & b_{n-1} & c \end{vmatrix}.$$

21. $$\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_1+2b_2 & ... & a_1+2b_n \\ a_2+2b_1 & a_2+2b_2 & ... & a_2+2b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n+2b_1 & a_n+2b_2 & ... & a_n+2b_n \end{vmatrix}.$$

22. $$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 & ... & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 & ... & a_2+x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & ... & a_n+x_n \end{vmatrix}.$$

23. $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 3 & 4 & 3 & ... & 3 \\ 3 & 3 & 6 & ... & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 3 & 3 & 3 & ... & 2n \end{vmatrix}.$$

24. $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & ... & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & a_1 & a_2 & ... & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

25. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 1+a_1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1+a_n & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

26. $\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & 3 & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} a & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & a-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a-b_n \end{vmatrix}$.

Задание 22. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$.

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -3 & 2 & 12 \\ 4 & -2 & 5 & 3 & 27 \\ 7 & 8 & -1 & 5 & 40 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 41 \end{array}\right)$.

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & -5 & 9 \\ 5 & -7 & 8 & 2 & 18 \\ 4 & 5 & -7 & -3 & -5 \\ 7 & 8 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$.

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$.

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 1 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 0 \end{array}\right)$.

6. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & -11 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & -6 \\ 5 & -9 & 4 & -1 & -17 \\ 4 & -6 & 3 & 1 & -10 \end{array}\right)$.

8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -11 \\ 3 & 1 & -5 & 1 & -16 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right).$

10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$

11. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & -1 & -1 & 16 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 8 \\ 5 & -3 & 6 & 3 & 12 \end{array}\right).$

12. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$

13. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & -6 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right).$

14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right).$

15. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right).$

16. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 1 & -17 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \end{array}\right).$

17. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right).$

18. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right).$

19. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$

20. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right).$

21. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right).$

22. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right).$

23. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 9 \end{array}\right).$

24. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 16 \end{array}\right).$

25. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$.

26. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$.

27. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -4 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & -12 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right)$.

28. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -13 & 2 & -2 \end{array}\right)$.

29. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$.

30. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right)$.

Задание 23. Выяснить, является ли группой алгебра $\langle G, \bullet\rangle$.

1. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = ab+a+b$.
2. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = 2ab+a+b$.
3. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$; $a\bullet b = ab+a+b$.
4. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$; $a\bullet b = 2ab+a+b$.
5. $G = \boldsymbol{R}_+$; $a\bullet b = \sqrt{a^2+b^2}$.
6. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = 3+a+b$.
7. $G = \boldsymbol{R}^*$; $a\bullet b = 3ab$.
8. $G = \boldsymbol{R}^*$; $a\bullet b = 7ab$.
9. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = ab+2a+2b+8$.
10. $G = \boldsymbol{R}^2$; $(a, b)\bullet(c, d) = (ac, bd)$.
11. $G = \boldsymbol{R}^*$; $a\bullet b = \frac{1}{3}ab$.
12. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{1\}$; $a\bullet b = -ab+a+b$.
13. $G = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^*$; $(a, b)\bullet(c, d) = (a+c, bd)$.
14. $G = \boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{Q}$; $(a, b)\bullet(c, d)=(\frac{1}{2}ac, b+d)$.
15. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = -ab+a+b$.
16. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$; $a\bullet b = -2ab+a+b$.
17. $G = 2\boldsymbol{Z}$; $a\bullet b = \frac{1}{2}ab$.
18. $G = \boldsymbol{Z}$; $a\bullet b = -3ab+a+b$.
19. $G=\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$; $a\bullet b =2ab+2a+2b+1$.
20. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$; $a\bullet b = ab+a+b+1$.
21. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = 5+a+b$.
22. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = 5ab$.
23. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = p+a+b$.
24. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = 5ab+a+b$.
25. $G = \boldsymbol{R}\backslash\{5\}$; $a\bullet b = -5ab+a+b$.
26. $G = \boldsymbol{R}^*$; $a\bullet b = \frac{a+b}{ab}$.
27. $G = \boldsymbol{R}^*$; $a\bullet b = \frac{ab}{a+b}$.
28. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = \sqrt[3]{a^3+b^3}$.
29. $G = \boldsymbol{R}$; $a\bullet b = \sqrt[5]{a^5+b^5}$.
30. $G = \boldsymbol{R}_+$; $a\bullet b = \sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Задание 24. Доказать, что подмножество H группы $\langle \boldsymbol{R}^2; +\rangle$ является подгруппой. Описать строение смежных классов группы по подгруппе H. Дать геометрическую интерпретацию H и смежным классам. Сформулировать правило сложения элементов фактор-группы $\boldsymbol{R}^2/H$. Доказать, что $\boldsymbol{R}^2/H$ изоморфна аддитивной группе действительных чисел.

1. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+\alpha_2=0\}$.
2. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1-\alpha_2=0\}$.
3. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+3\alpha_2=0\}$.
4. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+2\alpha_2=0\}$.
5. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1-2\alpha_2=0\}$.
6. $H = \{(\alpha_1;\ \alpha_2):2\alpha_1+3\alpha_2=0\}$.
7. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):4\alpha_1-\alpha_2=0\}$.
8. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2=0\}$.
9. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1+3\alpha_2=0\}$.
10. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):5\alpha_1+\alpha_2=0\}$.
11. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1+\alpha_2=0\}$.
12. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1-3\alpha_2=0\}$.
13. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+4\alpha_2=0\}$.
14. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1+5\alpha_2=0\}$.
15. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):4\alpha_1+2\alpha_2=0\}$.
16. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1+5\alpha_2=0\}$.
17. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):-\alpha_1+5\alpha_2=0\}$.
18. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1+5\alpha_2=0\}$.
19. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):5\alpha_1-3\alpha_2=0\}$.
20. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1-3\alpha_2=0\}$.
21. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1+4\alpha_2=0\}$.
22. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):\alpha_1-6\alpha_2=0\}$.
23. $H = \left\{(\alpha_1;\alpha_2):\frac{2}{5}\alpha_1+\alpha_2=0\right\}$
24. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1-5\alpha_2=0\}$.
25. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):5\alpha_1-4\alpha_2=0\}$.
26. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):4\alpha_1+5\alpha_2=0\}$.
27. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):-3\alpha_1-3\alpha_2=0\}$.
28. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):7\alpha_1-\alpha_2=0\}$.
29. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):3\alpha_1+6\alpha_2=0\}$.
30. $H = \{(\alpha_1;\alpha_2):2\alpha_1+7\alpha_2=0\}$.

Задание 25

- Составить таблицу Кэли для циклической группы G порядка n.
- Существует ли в G подгруппа H порядка n_1? n_2?
- Если существует, то составить таблицу Кэли для нее и для ее фактор-группы.

1. 10; 2, 3.
2. 9; 3, 6.
3. 18; 3, 4.
4. 12; 3, 5.
5. 14; 2, 3.
6. 8; 4, 5.
7. 15; 5, 6.
8. 16; 7, 8.
9. 15; 4, 5.
10. 21; 2, 3.
11. 10; 5, 6.
12. 18; 9, 10.
13. 20; 5, 6.
14. 21; 4, 7.
15. 20; 9, 10.
16. 11; 2, 9.
17. 12; 6, 7.
18. 14; 7, 8.
19. 15; 3, 4.
20. 16; 8, 10.

21. 12; 8, 3.
22. 18; 9, 10.
23. 20; 5, 6.
24. 16; 8, 9.
25. 14; 3, 7.
26. 15; 3, 6.
27. 14; 7, 8.
28. 12; 4, 7.
29. 18; 6, 12.
30. 16; 6, 4.

Задание 26. Заданы группы $\langle \boldsymbol{R}^2; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$. Функция f отображает $\boldsymbol{R}^2$ в $\boldsymbol{R}$. Является ли f гомоморфизмом групп? Если является, то найти его ядро.

1. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+\alpha_2$.
2. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 2\alpha_1-\alpha_2$.
3. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+3\alpha_2$.
4. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+2\alpha_2$.
5. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1-2\alpha_2$.
6. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 2\alpha_1+3\alpha_2$.
7. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1-\alpha_2$.
8. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2$.
9. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1+2\alpha_2$.
10. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 5\alpha_1+\alpha_2$.
11. $f(\alpha_1; a_2) = 2\alpha_1+\alpha_2$.
12. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+2\alpha_2$.
13. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+4\alpha_2$.
14. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+5\alpha_2$.
15. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 4\alpha_1+2\alpha_2$.
16. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 2\alpha_1+5\alpha_2$.
17. $f(\alpha_1; \alpha_2) = -\alpha_1+5\alpha_2$.
18. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1+5\alpha_2$.
19. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 5\alpha_1-3\alpha_2$.
20. $f(\alpha_1; \alpha_2) =-3\alpha_1+3\alpha_2$.
21. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1+4\alpha_2$.
22. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1-6\alpha_2$.
23. $f(\alpha_1; \alpha_2) = \alpha_1+\frac{2}{5}\alpha_2$.
24. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1-5\alpha_2$.
25. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 5\alpha_1-4\alpha_2$.
26. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 4\alpha_1+3\alpha_2$.
27. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1+3\alpha_2$.
28. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 7\alpha_1-\alpha_2$.
29. $f(\alpha_1; \alpha_2) = 3\alpha_1+6\alpha_2$.
30. $f(\alpha_1; \alpha_2) = -2\alpha_1+7\alpha_2$.

Задание 27. Доказать неизоморфность алгебр.

1. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$.
2. $\langle \boldsymbol{Z}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.
3. $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
4. $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{N}; +\rangle$.
5. $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$.
6. $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
7. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$.
8. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$.
9. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$.
10. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$.
11. $\langle \boldsymbol{N}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.
12. $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}_+; \cdot\rangle$.
13. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$.
14. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
15. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$.
16. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
17. $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; +\cdot\rangle$.
18. $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$.
19. $\langle \boldsymbol{Z}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$.
20. $\langle \boldsymbol{Z}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^* \cdot\rangle$.
21. $\langle \boldsymbol{Z}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
22. $\langle \boldsymbol{R}^*_+; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.
23. $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
24. $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.

25. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.
26. $\langle \boldsymbol{R}^*; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$.
27. $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*; \cdot\rangle$.
28. $\langle \boldsymbol{R}; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; +\rangle$.
29. $\langle \boldsymbol{R}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.
30. $\langle \boldsymbol{Z}; \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}; \cdot\rangle$.

Задание 28. Доказать свойства колец и полей.

1. $a-b = a+(-b)$, $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
2. $-(a+b) = (-a)+(-b)$, $\frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b}$.
3. $0-a = -a$, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
4. $-(a-b) = b-a$, $\frac{a}{a} = 1$.
5. $a-b = c-d \Rightarrow a+d = b+c$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.
6. $a+d = b+c \Rightarrow a-b = c-d$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
7. $(a-b)+c = (a+c)-b$, $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.
8. $(a+c)-(b+c) = a-b$, $\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
9. $-(-a) = a$, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.
10. $0\cdot a = 0$, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.
11. $a-a = 0$, $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
12. $(-a)b = -ab$, $\frac{a}{b} = a\cdot b^{-1}$.
13. $a(-b) = -ab$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.
14. $(a-b)-(c-d) = (a+d)-(b+c)$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
15. $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$, a^{-1} единственный.
16. $(a-b)(c-d) = (ac+bd)-(bc+ad)$, $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$.
17. $(a-b)c = ac-bc$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
18. $a(b-c) = ab-ac$, $\frac{0}{a} = 0$.
19. $(-1)a = -a$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$.

20. 0 единственный, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.
21. $-a$ единственный, $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
22. $a+c = b+c \Rightarrow a = b$, $a^2 = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$.
23. $a-c = b-c \Rightarrow a = b$, $a^{-1} = a \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$.
24. $c-a = c-b \Rightarrow a = b$, $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$.
25. $a = -b \Rightarrow b = -a$, 1 единственный.
26. $a-0 = a$, $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.
27. $-0 = 0$, $-a = (-1)\,a$.
28. $a-(b+c) = (a-b)-c$, $\frac{a}{1} = a$.
29. $a-(b-c) = (a+c)-b$, $\frac{a}{-1} = -a$.
30. $a-(b+c) = (a-b)-c$, $\frac{a}{b} = ab \Rightarrow b = 1 \vee b = -1$.

Задание 29. Доказать свойства упорядоченных колец и полей.

1. $a < b \Leftrightarrow a-b < 0$.
2. $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$.
3. $a < b \wedge c < d \Rightarrow a+c < b+d$.
4. $a < b \wedge n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow na < nb$.
5. $0 < a < b \wedge 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$.
6. $0 < a < b \wedge n \in \boldsymbol{N} \Rightarrow a^n < b^n$.
7. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$.
8. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
9. $a > 0 \Rightarrow a > -a$.
10. $a < 0 \Rightarrow a < -a$.
11. $a > -a \Rightarrow a > 0$.
12. $a < -a \Rightarrow a < 0$.
13. $ac > bc \wedge c < 0 \Rightarrow a < b$.
14. $ac > bc \wedge c > 0 \Rightarrow a > b$.
15. $ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.
16. $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$.
17. $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.
18. $a^{-1} > 0 \Rightarrow a > 0$.
19. $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$.
20. $a^{-1} < 0 \Rightarrow a < 0$.
21. $a < b \wedge c > d \Rightarrow a-c < b-d$.
22. $a < b \wedge c > d \Rightarrow c-a > d-b$.
23. $|ab| = |a||b|$.
24. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
25. $|a+b| \le |a| + |b|$.
26. $|a+b| \ge |a| - |b|$.
27. $|a-b| \le |a| + |b|$.
28. $|a-b| \ge |a| - |b|$.
29. $|a-b| \ge |b| - |a|$.
30. $|ab| = |a||-b|$.

Задание 30. Доказать, что $\langle \boldsymbol{R};\ \oplus, \otimes \rangle$ поле, если операции $\oplus$ и $\otimes$ задаются следующим образом:

1. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = ab-2a-2b+6$.
2. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = \frac{1}{2}ab-a-b+4$.

3. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(ab-2a-2b+10)$.
4. $a \oplus b = a+b+3$, $a \otimes b = ab+3a+3b+6$.
5. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = 2ab-4a-4b+10$.
6. $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = \frac{1}{2}(ab+a+b-1)$.
7. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = ab+2a+2b+2$.
8. $a \oplus b = a+b-1$, $a \otimes b = \frac{1}{2}(ab-a-b+3)$.
9. $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = 2ab+2a+2b+1$.
10. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = 3ab-6a-6b+14$.
11. $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = 3ab+3a+3b+2$.
12. $a \oplus b = a+b+3$, $a \otimes b = 2ab+6a+6b+15$.
13. $a \oplus b = a+b-1$, $a \otimes b = 2ab-2a-2b+3$.
14. $a \oplus b = a+b-2$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(2ab-4a-4b+14)$.
15. $a \oplus b = a+b+\frac{1}{4}$, $a \otimes b = 4ab+a+b$.
16. $a \oplus b = a+b-1$, $a \otimes b = ab-a-b+2$.
17. $a \oplus b = a+b-3$, $a \otimes b = 3(ab-3a-3b+10)$.
18. $a \oplus b = a+b-3$, $a \otimes b = ab-3a-3b+12$.
19. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = \frac{1}{2}(ab+2a+2b)$.
20. $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(ab+a+b-2)$.
21. $a \oplus b = a+b+1$, $a \otimes b = ab+a+b$.
22. $a \oplus b = a+b-1$, $a \otimes b = 3ab-3a-3b+4$.
23. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(ab+2a+2b-2)$.
24. $a \oplus b = a+b-3$, $a \otimes b = 2ab-6a-6b+21$.
25. $a \oplus b = a+b+3$, $a \otimes b = 3ab+9a+9b+24$.
26. $a \oplus b = a+b+3$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(ab+3a+3b)$.
27. $a \oplus b = a+b-3$, $a \otimes b = \frac{1}{3}ab-a-b+6$.
28. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = 2ab+4a+4b+6$.
29. $a \oplus b = a+b-1$, $a \otimes b = \frac{1}{3}(ab-a-b+4)$.
30. $a \oplus b = a+b+2$, $a \otimes b = 3ab+6a+6b+10$.

Задание 31. Доказать, что отображение f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ является изоморфизмом $\langle \boldsymbol{R}; +, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}; \oplus, \otimes \rangle$, где $\langle \boldsymbol{R}; \oplus, \otimes \rangle$ то же, что в задании 30. Пользуясь этим, дать новое доказательство тому, что $\langle \boldsymbol{R}; \oplus, \otimes \rangle$ – поле.

1. $f(x) = x+2$.
2. $f(x) = 2x+2$.
3. $f(x) = 3x+2$.
4. $f(x) = x-3$.

5. $f(x) = \frac{1}{2}x+2$.
6. $f(x) = 2x-1$.
7. $f(x) = x-2$.
8. $f(x) = 2x+1$.
9. $f(x) = \frac{1}{2}x-1$.
10. $f(x) = \frac{1}{3}x+2$.
11. $f(x) = \frac{1}{3}x-1$.
12. $f(x) = \frac{1}{2}x-3$.
13. $f(x) = \frac{1}{2}x+1$.
14. $f(x) = \frac{3}{2}x+2$.
15. $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)$.
16. $f(x) = x+1$.
17. $f(x) = \frac{1}{3}x+3$.
18. $f(x) = x+3$.
19. $f(x) = 2x-2$.
20. $f(x) = 3x-1$.
21. $f(x) = x-1$.
22. $f(x) = \frac{1}{3}x+1$.
23. $f(x) = 3x-2$.
24. $f(x) = \frac{1}{2}x+3$.
25. $f(x) = \frac{1}{3}x-3$.
26. $f(x) = 3x-3$.
27. $f(x) = 3x+3$.
28. $f(x) = \frac{1}{2}x-2$.
29. $f(x) = 3x+1$.
30. $f(x) = \frac{1}{3}x-2$.

Задание 32. Изобразить геометрически.

1. $\{z\colon |z| \le 3 \wedge Im\, z \le 2\}$.
2. $\{z\colon arg\, z = 2 \wedge |z-i| \le 5\}$.
3. $\{z\colon 1 \le arg\, z \le 2 \wedge Re\, z = -5\}$.
4. $\{z\colon -1 \le Re\, z \le 3 \wedge \frac{\pi}{3} \le arg\, z \le \frac{5\pi}{3}\}$.
5. $\{z\colon -4 \le Re\, z \le 3 \wedge Im\, z = 5\}$.
6. $\{z\colon |z-2| = |z+2i|\}$.
7. $\{z\colon |z+1-3i| = 4 \wedge Re\, z > 1\}$.
8. $\{z\colon Re\, z = 3 \wedge Im\, z = -5\}$.
9. $\{z\colon |z+3-2i| \le 4 \wedge \frac{2\pi}{3} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{4}\}$.
10. $\{z\colon Re\, z < 2 \wedge \frac{\pi}{7} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{7}\}$.
11. $\{z\colon \frac{\pi}{3} \le arg\, z \le \frac{2\pi}{3} \wedge 2 \le Im\, z \le 4\}$.
12. $\{z\colon arg\, z = \frac{5\pi}{6} \wedge 4 \le |z+3-2i| \le 5\}$.
13. $\{z\colon |z-2+3i| \ge 2 \wedge -6 \le Im\, z \le 1\}$.
14. $\{z\colon -3 \le Re\, z \le 2 \wedge -2 \le Im\, z \le 3\}$.
15. $\{z\colon |z+2-3i| > |z-4-3i|\}$.
16. $\{z\colon arg\, z = \frac{\pi}{4} \vee |z+3+4i| = 5\}$.
17. $\{z\colon z = -2w \wedge |w| = 1\}$.
18. $\{z\colon |z+3| + |z-3| \le 8\}$.

19. $\{z\colon |z-2|-|z+2|=2\}$.
20. $\{z\colon |z-1|=|z+1|=|z-2i|\}$.
21. $\{z\colon z = 2w-1+3i \wedge |w|=2\}$.
22. $\{z\colon \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \le 1\}$.
23. $\{z\colon |z-4| \le |z+4i|\}$.
24. $\{z\colon |z-1+2i|=5 \wedge \frac{\pi}{4} < arg\ z < \pi\}$.
25. $\{z\colon |z-2|=|z-6-4i|\}$.
26. $\{z\colon |z-4-i|=|z-6-5i| \wedge \frac{\pi}{4} < arg\, z < \frac{\pi}{2}\}$.
27. $\{z\colon \frac{\pi}{6} < arg\ z < \frac{\pi}{3} \wedge |z-5-5i|=4\}$.
28. $\{z\colon |z-5-5i| \le 4 \wedge Re\ z > 7\}$.
29. $\{z\colon z = 1+3i+w \wedge arg\ w = \frac{\pi}{4}\}$.
30. $\{z\colon z = iw \wedge 0 \le Im\ w \le 2 \wedge 0 \le Re\ w \le 4\}$.

Задание 33. Записать числа в тригонометрической форме.

1. $-6+6\sqrt{3}i$, $\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin(\pi-\frac{\alpha}{2})$.
2. -2, $-2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.
3. $2i$, $\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}$.
4. $-2i$, $\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$.
5. $1+i$, $2\cos\frac{7\pi}{4}-2i\sin\frac{7\pi}{4}$.
6. $1-i$, $-\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$.
7. $-1+i$, $\sin\frac{6\pi}{5}+i(1+\cos\frac{6\pi}{5})$.
8. $-1-i$, $-1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$
9. $1+i\sqrt{3}$, $-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$
10. $-1+i\sqrt{3}$, $\sin\frac{2\pi}{5}+i(1-\cos\frac{2\pi}{5})$.
11. $-1-i\sqrt{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha+i$, $\alpha\in(\pi, 2\pi)$.
12. $1-i\sqrt{3}$, $1+\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$.
13. $\sqrt{3}+i$, $1+i\,\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha\in(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
14. $-\sqrt{3}+i$, $\mathrm{tg}\alpha-i$, $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$.
15. $\sqrt{3}-i$, $\sin\alpha+i(1+\cos\alpha)$, $\alpha\in(0, \pi)$.
16. $-\sqrt{3}-i$, $\sin\alpha-i\cos\alpha$.
17. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha\in(0, \pi)$.
18. $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\cos\alpha+i\sin\alpha$.
19. $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sin\alpha+i\cos\alpha$.
20. $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $1+\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\alpha\in(2\pi, 4\pi)$.
21. $-10(1+i\sqrt{3})$, $1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$
22. $-2(\sqrt{3}+i)$, $-2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}$.
23. $-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$, $-5\cos\frac{\pi}{8}-5i\sin\frac{\pi}{8}$.
24. $-6(1-i\sqrt{3})$, $\sin\frac{4\pi}{5}+i(\cos\frac{4\pi}{5}-1)$.
25. $-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$, $-\sin\alpha-i\cos\alpha$.
26. $5-5i$, $-\sin\alpha+i(1+\cos\alpha)$, $\alpha\in(\pi, 2\pi)$.
27. $2-\sqrt{3}-i$, $-3\sin\alpha+3i\cos\alpha$.
28. $-12+12i$, $-\sin\alpha-i(1+\cos\alpha)$, $\alpha\in(2\pi, 4\pi)$.
29. $2+\sqrt{3}-i$, $-1+\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\alpha\in(2\pi, 4\pi)$.
30. $2+\sqrt{3}+i$, $\mathrm{ctg}\alpha-i$, $\alpha\in(0, \pi)$.

Задание 34. Выполнить действия.

1. $\dfrac{(2-2i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^4}+(-1-2i)(3-i).$

2. $\dfrac{(3\sqrt{3}-3i)^3}{8(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^2}+(3+2i)(2-5i).$

3. $\dfrac{(-4\sqrt{3}-4i)^3}{(-1+i)^{16}}+(2+3i)(-3+5i).$

4. $\dfrac{(-2\sqrt{3}+2i)^8}{(1-\sqrt{3}i)^{14}}+(2-2i)(3-2i).$

5. $\dfrac{(1-i)^9}{(-1+i)^5}+(11-7i)(-3+5i).$

6. $\dfrac{(1+i)^{12}}{2(-1+i)^9}+(6-5i)(-3+2i).$

7. $\dfrac{(-1-i)^{11}}{2(1+i)^8}+(2+3i)(-7+8i).$

8. $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}+(11-7i)(-3+5i).$

9. $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{32}}+(2+3i)(-7+8i).$

10. $\dfrac{(-1-i)^8}{(-1+i)^6}+(3-i)(-5+2i).$

11. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{24}}+(4-i)(2-5i).$

12. $\dfrac{(1+i)^{11}}{(1-i)^9}+(4-6i)(-2+5i).$

13. $\dfrac{(-1-i)^{10}}{(-1+i)^8}+(6-5i)(-3+2i).$

14. $\dfrac{(1+i)^9}{(-1+i)^6}+(11-7i)(-3+5i).$

15. $\dfrac{(1+i)^{12}}{2(-1+i)^9}+(6-5i)(-3+2i).$

16. $\dfrac{(-1-i)^{10}}{2(1-i)^7}+(3-i)(-5+2i).$

17. $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{32}}+(2+3i)(-7+8i).$

18. $\dfrac{(-1-i)^9}{(1-i)^7}+(2+2i)(7-8i).$

19. $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(2+2i)^4}+(-5+2i)(-5+i).$

20. $\dfrac{(-2+2i)^5}{(-1+i)^3}+(-5+2i)(-4+3i).$

21. $\dfrac{(-1-i)^{11}}{2(1-i)^8}+(7-3i)(-8+4i).$

22. $\dfrac{4^{12}}{(\sqrt{3}+i)^{12}}+(1-7i)(2+3i).$

23. $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i)^8+(1+i)^4}+7-4i^7.$

24. $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96}+(1+i)^{96}}+(4-7i)(-1+3i).$

25. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+\sqrt{3}i)^4}+(1+i)^2(\sqrt{3}-i).$

26. $\dfrac{(1+i)^9}{(-1-i)^{12}}+(3-2i)(-1+4i).$

27. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{12}-(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^{12}}+3-7i.$

28. $\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{10}}{(-1+i)^{16}}+(-4+3i)(3-5i).$

29. $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}+(1-6i)(-2+3i).$

30. $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(-1+i)^{20}}+(3-6i)(-4+5i).$

Задание 35. Найти все значения корней из комплексного числа. Изобразить их на координатной плоскости.

1. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.
2. $\sqrt[3]{-2+2i}$.
3. $\sqrt[6]{-27}$.
4. $\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$.
5. $\sqrt[3]{-27i}$.
6. $\sqrt[8]{256}$
7. $\sqrt[4]{-81}$
8. $\sqrt[3]{8i}$
9. $\sqrt[4]{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{3}i}$.
10. $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}$.
11. $\sqrt[6]{-64}$.
12. $\sqrt[4]{-32-32\sqrt{3}i}$.
13. $\sqrt[3]{-8i}$.
14. $\sqrt[8]{81}$.
15. $\sqrt[4]{-16}$.
16. $\sqrt[3]{27i}$.
17. $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}i}$.
18. $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$
19. $\sqrt[6]{-216}$.
20. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.
21. $\sqrt[3]{-125i}$.
22. $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$.
23. $\sqrt[4]{-625}$.
24. $\sqrt[3]{64i}$.
25. $\sqrt[4]{-32+32\sqrt{3}i}$.
26. $\sqrt[6]{-125}$.
27. $\sqrt[4]{-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sqrt{3}i}$.
28. $\sqrt[3]{-64i}$
29. $\sqrt[8]{625}$.
30. $\sqrt[4]{-256}$.

Задание 36. Выяснить, образует ли векторное пространство относительно естественных операций указанное множество (в случае, если данная совокупность является подмножеством векторного пространства, можно воспользоваться критерием подпространства).

1. Векторы $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1+x_2+ \ldots +x_n = 0$.
2. Все матрицы формата $n \times n$ с коэффициентами из поля P.
3. Функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, принимающие значение, равное a в данной точке x_0.
4. Ограниченные последовательности действительных чисел.
5. Многочлены с действительными коэффициентами, имеющие данный корень $\alpha \in \boldsymbol{R}$.
6. Множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел (a_n), элементы которых удовлетворяют соотношению $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$.
7. Множество всех многочленов данной степени с действительными коэффициентами.
8. Векторы плоскости с началом в точке O, концы которых лежат на одной из двух данных прямых, пересекающихся в O.

9. Квадратные матрицы, перестановочные с фиксированной матрицей A.
10. Многочлены четной степени с действительными коэффициентами.
11. Функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, имеющие конечное число точек разрыва.
12. Бесконечные последовательности действительных чисел, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля.
13. Множество всех многочленов f с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условию $f(1) + f(2) + ... + f(k) = 0$ (k – фиксированное число).
14. Векторы плоскости с началом O, концы которых не лежат на данной прямой.
15. Последовательности действительных чисел, имеющие предел.
16. Вырожденные матрицы данного формата.
17. Функции, имеющие предел A при $x \to \infty$.
18. Многочлены с действительными коэффициентами, имеющие данный корень $\alpha \in \boldsymbol{R}$.
19. Многочлены f с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию $2f(0) - 3f(1) = 0$.
20. Векторы $\boldsymbol{R}^n$, являющиеся решениями данной системы линейных уравнений.
21. Невырожденные матрицы данного формата.
22. Многочлены с рациональными коэффициентами, не содержащие четных степеней x.
23. Функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, имеющие корень хотя бы в одной точке сегмента $[\alpha; \beta]$.
24. Последовательности рациональных чисел, в которых все элементы отличны от нуля.
25. Векторы пространства $\boldsymbol{R}^n$, координатами которых являются целые числа.
26. Квадратные матрицы, сумма диагональных элементов которых равна нулю (над произвольным полем P).
27. Бесконечные последовательности действительных чисел, в которых лишь конечное число элементов равно нулю.
28. Последовательности действительных чисел, имеющих конечный предел A.
29. Функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, принимающие значение 0 во всех точках некоторого множества S.
30. Квадратные матрицы, перестановочные со всеми матрицами данного формата.

Задание 37. Выяснить, является ли подмножество $U \subset \boldsymbol{R}^4$ векторным подпространством. Если является, то найти его базис и размерность $U = \{(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4): ... \}$.

1. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$.
2. $\alpha_1 = \alpha_3$, $\alpha_2+\alpha_4 = 0$.
3. $3\alpha_2+2\alpha_3 = 0$.
4. $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$.
5. $4\alpha_1-\alpha_4 = 1$.
6. $\alpha_4 = 0$, $\alpha_1-2\alpha_2 = 0$.
7. $\alpha_1+\alpha_3 = 0$.
8. $\alpha_3+2\alpha_2 = 0$.
9. $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 = 0$.
10. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 = 0$.
11. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 = 1$.
12. $\alpha_1 = \alpha_3+1$.
13. $\alpha_1 = 2\alpha_2 = 4\alpha_4$.
14. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$.
15. $\alpha_2-3\alpha_3 = 2$.
16. $\alpha_3 = 2\alpha_4 = -\alpha_1$.

17. $\alpha_1 = 2\alpha_2 = -3\alpha_3$.
18. $\alpha_1 = 2\alpha_2^2$.
19. $\alpha_3+5\alpha_1 = 0$.
20. $\alpha_1^2-\alpha_1 = 2$.
21. $\alpha_1^2-\alpha_1 = 0$.
22. $\alpha_1^2+\alpha_2^2 = 0$.
23. $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$.
24. $\alpha_1 = 3\alpha_3 = -6\alpha_2$.
25. $\alpha_1-2\alpha_3+\alpha_4 = 0$.
26. $3\alpha_3+4\alpha_4 = 0$.
27. $\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4= 0$.
28. $5\alpha_3+2\alpha_4 = 0$.
29. $2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 = 0$.
30. $\alpha_1 = 3\alpha_3 =2\alpha_4$.

Задание 38. Выяснить, образуют ли векторы a_1, a_2, a_3 базис векторного пространства. Если образуют, то найти координаты вектора x в этом базисе.

1. $a_1 = (1; 2; -1)$,
   $a_2 = (-1; -1; 3)$,
   $a_3 = (-2; -1; 2)$,
   $x = (6; 5; -8)$.
2. $a_1 = (0; 2; 3)$,
   $a_2 = (1; 3; 5)$,
   $a_3 = (3; 5; 7)$,
   $x = (12; 26; 39)$.
3. $a_1 = (3; 2; 3)$,
   $a_2 = (-4;-3;-5)$,
   $a_3 = (5; 1; -1)$,
   $x = (21; 10; 11)$.
4. $a_1 = (2; 6; 5)$,
   $a_2 = (5; 3; -2)$,
   $a_3 = (7; 4; -3)$,
   $x = (-24;-4;22)$.
5. $a_1 = (2; 2; -1)$,
   $a_2 = (2; -1; 2)$,
   $a_3 = (-1; 2; 2)$,
   $x = (7; -5; 5)$.
6. $a_1 = (1; -1; 1)$,
   $a_2 = (1; 2; 4)$,
   $a_3 = (1; 1; 1)$,
   $x = (0; 4; 6)$.
7. $a_1 = (2; 3; 1)$,
   $a_2 = (1; 1; 0)$,
   $a_3 = (-1; -2; 1)$,
   $x = (9; 13; 0)$.
8. $a_1 = (1; -2; 3)$,
   $a_2 = (-3; 7; 2)$,
   $a_3 = (-1; 2; -4)$,
   $x=(-11;24;-14)$.
9. $a_1 = (-2; 3; 1)$,
   $a_2 = (3; 6; 2)$,
   $a_3 = (1; 2; 1)$,
   $x = (10; 27; 9)$.
10. $a_1 = (1; 1; 1)$,
    $a_2 = (1; 2; 3)$,
    $a_3 = (-3; -5;-6)$,
    $x = (15; 25; 31)$.
11. $a_1 = (-5; 4; 2)$,
    $a_2 = (3; -2; -1)$,
    $a_3 = (-1; 1; 0)$,
    $x = (-19; 14; 7)$.
12. $a_1 = (0; 1; -2)$,
    $a_2 = (2; 1; -5)$,
    $a_3 = (-1; -1; 4)$,
    $x = (10; 7; -31)$.
13. $a_1 = (1; 2; 3)$,
    $a_2 = (1; 2; 4)$,
    $a_3 = (1; 1; 1)$,
    $x = (6; 11; 19)$.
14. $a_1 = (2; 1; -1)$,
    $a_2 = (2; -1; 2)$,
    $a_3 = (3; 0; 1)$,
    $x = (20; 1; 4)$.
15. $a_1 = (1; 1; 1)$,
    $a_2 = (1; 2; 3)$,
    $a_3 = (1; 3; 4)$,
    $x = (6; 14; 19)$.
16. $a_1 = (-1; 3; -5)$,
    $a_2 = (4; 0; 2)$,
    $a_3 = (1; 3; -1)$,
    $x = (3; 9; -7)$.

17. $a_1 = (-4; 1; 1)$,
$a_2 = (8; -9; 3)$,
$a_3 = (-4; 6; -2)$,
$x = (24; -25; 7)$.

18. $a_1 = (-8; -5; 1)$,
$a_2 = (29; 18; -3)$,
$a_3 = (-4; -17; 1)$,
$x = (53; 62; -7)$.

19. $a_1 = (1; -38; 24)$,
$a_2 = (-1; 41; -29)$,
$a_3 = (1; -34; 24)$,
$x = (1; -24; 17)$.

20. $a_1 = (1; 2; 3)$,
$a_2 = (1; 2; -1)$,
$a_3 = (3; 1; -1)$,
$x = (11; 7; -1)$

21. $a_1 = (-2; 2; -6)$,
$a_2 = (3; 0; -3)$,
$a_3 = (-1; -2; 3)$,
$x = (-15; 0; -3)$.

22. $a_1 = (1; -5; -1)$,
$a_2 = (-3; 3; 1)$,
$a_3 = (-1; 1; -1)$,
$x = (-3; 1; -1)$.

23. $a_1 = (32; 2; 25)$,
$a_2 = (14; 1; 11)$,
$a_3 = (-1; 0; -1)$,
$x = (92; 6; 72)$.

24. $a_1 = (2; -1; 0)$,
$a_2 = (-1; -3; 7)$,
$a_3 = (0; 7; -21)$,
$x = (3; 37; -105)$.

25. $a_1 = (3; 1; 1)$,
$a_2 = (-3; -3; -2)$,
$a_3 = (1; 2; 1)$,
$x = (14; 12; 8)$.

26. $a_1 = (1; 2; 0)$,
$a_2 = (1; 2; 1)$,
$a_3 = (1; 1; -2)$,
$x = (5; 8; -3)$.

27. $a_1 = (1; 2; 3)$,
$a_2 = (3; 2; 4)$,
$a_3 = (1; 1; 2)$,
$x = (6; 6; 11)$.

28. $a_1 = (-2; 1; 2)$,
$a_2 = (3; -2; -1)$,
$a_3 = (-1; 1; 0)$,
$x = (-13; 9; 5)$.

29. $a_1 = (1; 1; -1)$,
$a_2 = (-4; -5; 6)$,
$a_3 = (-3; -3; 4)$,
$x = (-13; -13; 17)$.

30. $a_1 = (1; 1; -1)$,
$a_2 = (1; -3; 2)$,
$a_3 = (-1; 2; -1)$,
$x = (6; -8; 4)$.

Задание 39. Найти базисы и размерности подпространств $U_1 + U_2$ и $U_1 \cap U_2$, если $U_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $U_2 = L(b_1, b_2, b_3)$.

1. $a_1 = (1; 2; 1)$,
$a_2 = (1; 1; -1)$,
$a_3 = (1; 3; 3)$,
$b_1 = (1; 2; 2)$,
$b_2 = (2; 3; -1)$,
$b_3 = (1; 1; -3)$.

2. $a_1 = (2; 3; 1; -3)$,
$a_2 = (2; -1; 1; 1)$,
$a_3 = (5; -4; 3; 5)$,
$b_1 = (1; 1; -2; 1)$,
$b_2 = (4; 3; -4; -8)$,
$b_3 = (1; 2; -6; 13)$.

3. $a_1 = (-1; 6; 4; 7)$,
$a_2 = (-2; 3; 0; 5)$,
$a_3 = (-3; 6; 5; 6)$,
$b_1 = (1; 1; 2; 1)$,
$b_2 = (0; -2; 0; -1)$,
$b_3 = (2; 0; 2; 1)$.

4. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (-1; -1; 1; -1)$,
$a_3 = (-2; -2; 6; -2)$,
$b_1 = (-1; 2; 0; 1)$,
$b_2 = (2; 2; 0; 1)$,
$b_3 = (5; 8; 0; 4)$.

5. $a_1 = (2; -2; 3; -3)$,
$a_2 = (1; 2; 3; 6)$,
$a_3 = (5; 4; 12; 15)$,
$b_1 = (2; -3; 1; 0)$,
$b_2 = (1; 1; 1; 1)$,
$b_3 = (6; 1; 5; 4)$.

6. $a_1 = (2; -4; 3; 2)$,
$a_2 = (1; 3; -3; -1)$,
$a_3 = (1; 1; -2; -1)$,
$b_1 = (4; 0; 0; 4)$,
$b_2 = (9; 3; 7; -3)$,
$b_3 = (-1; -3; -7; 11)$.

7. $a_1 = (-4; 4; 3; 1)$,
$a_2 = (1; -1; 2; 1)$,
$a_3 = (-3; 3; 3; 2)$,
$b_1 = (7; 7; 0; 0)$,
$b_2 = (12; -2; 2; 5)$,
$b_3 = (2; 16; -2; -5)$.

8. $a_1 = (1; 2; 0; 1)$,
$a_2 = (1; 1; 1; 0)$,
$a_3 = (1; 5; -3; 4)$,
$b_1 = (1; 0; 1; 0)$,
$b_2 = (1; 3; 0; 1)$,
$b_3 = (-2; 6; -4; 2)$.

9. $a_1 = (0; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (1; 1; 1; 2)$,
$a_3 = (-2; 0; 1; 1)$,
$b_1 = (-1; 3; 2; -1)$,
$b_2 = (1; 1; 0; -1)$,
$b_3 = (-1; 7; 4; -3)$.

10. $a_1 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_2 = (3; 0; 6; -2)$,
$a_3 = (-1; -3; 7; 0)$,
$b_1 = (-2; 3; 1; 0)$,
$b_2 = (1; 0; 9; 1)$,
$b_3 = (3; 3; 46; 5)$.

11. $a_1 = (2; 1; 0)$,
$a_2 = (1; 2; 3)$,
$a_3 = (-5; -2; 1)$,
$b_1 = (1; 1; 2)$,
$b_2 = (-1; 3; 0)$,
$b_3 = (2; 0; 3)$.

12. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (1; 1; -1; -1)$,
$a_3 = (1; -1; 1; -1)$,
$b_1 = (1; -1; 1; 1)$,
$b_2 = (2; -2; 0; 0)$,
$b_3 = (3; -1; 1; 1)$.

13. $a_1 = (1; 2; 1; 1)$,
$a_2 = (2; 3; 1; 0)$,
$a_3 = (3; 1; 1; -2)$,
$b_1 = (0; 4; 1; 3)$,
$b_2 = (1; 0; -2; -6)$,
$b_3 = (1; 0; 3; 5)$.

14. $a_1 = (1; 1; 0; 0)$,
$a_2 = (1; 0; 0; -1)$,
$a_3 = (1; -1; 1; -1)$,
$b_1 = (1; -3; -1; 1)$,
$b_2 = (5; -3; 1; 1)$,
$b_3 = (3; -1; 1; 1)$.

15. $a_1 = (1; -2; 0; -2)$,
$a_2 = (1; 1; 0; -1)$,
$a_3 = (1; 2; 1; 1)$,
$b_1 = (1; 4; -1; -1)$,
$b_2 = (1; 4; 4; 8)$,
$b_3 = (2; 0; 1; -1)$.

16. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_2 = (6; 6; 3; 1)$,
$a_3 = (1; 1; -1; -4)$,
$b_1 = (1; -1; 0; 0)$,
$b_2 = (1; -1; 0; 0)$,
$b_3 = (5; -3; 3; 4)$.

17. $a_1 = (5; 5; 5; 1)$,
$a_2 = (-1; -1; 3; 1)$,
$a_3 = (3; 3; 0; -2)$,
$b_1 = (1; -1; 0; 0)$,
$b_2 = (11; 3; 3; -3)$,
$b_3 = (7; 7; 3; -3)$.

18. $a_1 = (3; 1; 1; 3)$,
$a_2 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_3 = (3; 1; 0; 3)$,
$b_1 = (-1; 0; 0; 1)$,
$b_2 = (3; 2; 0; 9)$,
$b_3 = (1; 1; 0; 5)$.

19. $a_1 = (2; 3; 4; 0)$,
$a_2 = (1; -1; 2; 0)$,
$a_3 = (5; 0; 3; 0)$,
$b_1 = (0; 0; 0; -1)$,
$b_2 = (4; 2; 3; -7)$,
$b_3 = (8; 4; 6; 3)$.

20. $a_1 = (1; -3; -3; 1)$,
$a_2 = (3; -3; -3; -1)$,
$a_3 = (3; 1; 1; -2)$,
$b_1 = (0; 2; -2; 0)$,
$b_2 = (7; -2; -8; 2)$,
$b_3 = (7; -10; 0; 2)$.

21. $a_1 = (2; 3; 2; 1)$,
$a_2 = (2; 1; 2; 1)$,
$a_3 = (3; 5; 3; -1)$,
$b_1 = (-3; 0; 3; 0)$,
$b_2 = (-6; -1; 8; 3)$,
$b_3 = (3; -1; -1; 3)$.

22. $a_1 = (3; 4; 4; -2)$,
$a_2 = (2; 1; 5; -2)$,
$a_3 = (-2; 3; -3; -4)$,
$b_1 = (-2; 1; 1; 1)$,
$b_2 = (5; 1; 17; 6)$,
$b_3 = (1; 3; 19; 8)$.

23. $a_1 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_2 = (2; 5; 1; 5)$,
$a_3 = (1; 5; 4; 2)$,
$b_1 = (2; 2; -2; -2)$,
$b_2 = (7; 14; 6; 3)$,
$b_3 = (1; 8; 12; 9)$.

24. $a_1 = (3; 2; 2; 5)$,
$a_2 = (1; 4; 4; 5)$,
$a_3 = (-2; -1; -1; 3)$,
$b_1 = (0; -3; 3; 0)$,
$b_2 = (0; -1; -5; 3)$,
$b_3 = (0; 0; -2; 1)$.

25. $a_1 = (2; 3; 4; -5)$,
$a_2 = (-1; 2; -1; -2)$,
$a_3 = (0; 4; 3; -7)$,
$b_1 = (-1; 1; 1; 1)$,
$b_2 = (8; -1; 10; -5)$,
$b_3 = (5; 2; 13; -2)$.

26. $a_1 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_2 = (4; -1; 2; 7)$,
$a_3 = (-1; 3; 2; -2)$,
$b_1 = (-3; 3; -3; 3)$,
$b_2 = (-3; 8; -1; 4)$,
$b_3 = (3; -1; 8; -5)$.

27. $a_1 = (2; -2; 3; -3)$,
$a_2 = (1; 2; 3; -6)$,
$a_3 = (-2; 3; -1; 0)$,
$b_1 = (5; 5; 5; 5)$,
$b_2 = (4; 7; 10; -13)$,
$b_3 = (9; 12; 15; -8)$.

28. $a_1 = (2; 3; 4; -3)$,
$a_2 = (1; -3; 2; -6)$,
$a_3 = (4; 1; 1; -4)$,
$b_1 = (1; -1; 1; 1)$,
$b_2 = (3; 2; 10; 1)$,
$b_3 = (5; 0; 12; 3)$.

29. $a_1 = (3; 2; -2; 1)$,
$a_2 = (-1; -1; 1; 2)$,
$a_3 = (4; 3; -3; 1)$,
$b_1 = (0; 3; 3; 0)$,
$b_2 = (5; 7; 1; 6)$,
$b_3 = (5; 1; -5; 6)$.

30. $a_1 = (2; 10; 5; 1)$,
$a_2 = (1; 7; 2; -1)$,
$a_3 = (1; 5; 4; -1)$,
$b_1 = (-8; 1; 1; 1)$,
$b_2 = (-6; 13; 4; 2)$,
$b_3 = (4; -25; -7; -3)$.

Задание 40. Произведение векторов $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ и $b = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$ определено на $\boldsymbol{R}^3$ заданным правилом. Является ли это правило скалярным произведением на $\boldsymbol{R}^3$?

1. $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.
2. $\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.
3. $\alpha_1\beta_1+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_3$.
4. $-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$.
5. $4\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_3$.
6. $\alpha_1\beta_1+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_3$.

7. $2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

8. $\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

9. $-2\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

10. $\alpha_1\beta_2-\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_1$.

11. $\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_3$.

12. $2\alpha_1\beta_1+\alpha_3\beta_1-2\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_3$.

13. $3\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1+\alpha_3\beta_3$.

14. $-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

15. $\alpha_1\beta_1-2\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+5\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

16. $\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_3$.

17. $-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_3$.

18. $4\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_2+\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_3$.

19. $\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2+4\alpha_3\beta_3$.

20. $2\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

21. $3\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+3\alpha_3\beta_3$.

22. $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1$.

23. $\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_3+2\alpha_3\beta_3$.

24. $\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3+2\alpha_3\beta_3$.

25. $2\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_2-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_3\beta_3$.

26. $5\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3+4\alpha_3\beta_3$.

27. $3\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

28. $\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\frac{1}{2}\alpha_3\beta_3$.

29. $8\alpha_1\beta_1+13\alpha_2\beta_2-6\alpha_3\beta_3$.

30. $3\alpha_1\beta_1-2\alpha_1\beta_2-2\alpha_2\beta_1+3\alpha_3\beta_3$.

Задание 41. Построить ортогональный базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3)$.

1. $a_1 = (1; 0; 0; 0)$,
   $a_2 = (1; 1; 0; 0)$,
   $a_3 = (1; 1; 1; 0)$.
2. $a_1 = (1; 1; 0; 0)$,
   $a_2 = (1; 1; 1; 0)$,
   $a_3 = (1; 1; 1; 1)$.
3. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
   $a_2 = (1; 1; 1; -1)$,
   $a_3 = (1; 1; -1; -1)$.
4. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
   $a_2 = (1; -1; 1; -1)$,
   $a_3 = (1; 1; -1; 1)$.
5. $a_1 = (1; 1; 1; 1)$,
   $a_2 = (1; -1; -1; -1)$,
   $a_3 = (-1; -1; -1; 1)$.
6. $a_1 = (1; 0; 1; 0)$,
   $a_2 = (1; 1; 1; 0)$,
   $a_3 = (1; 0; 1; 1)$.
7. $a_1 = (1; 1; 1; 0)$,
   $a_2 = (1; 1; 0; 1)$,
   $a_3 = (1; 0; 1; 1)$.
8. $a_1 = (1; -1; 1; -1)$,
   $a_2 = (-1; 1; 1; -1)$,
   $a_3 = (1; 1; 1; 1)$.
9. $a_1 = (1; 0; 0; 1)$,
   $a_2 = (0; 1; 1; 1)$,
   $a_3 = (0; 0; 0; 1)$.
10. $a_1 = (1; -1; 1; 1)$,
    $a_2 = (1; 1; -1; 1)$,
    $a_3 = (1; 1; 1; -1)$.
11. $a_1 = (0; 0; 1; 1)$,
    $a_2 = (0; 1; 1; 0)$,
    $a_3 = (1; 1; 0; 0)$.
12. $a_1 = (0; 0; 1; -1)$,
    $a_2 = (0; 1; -1; 0)$,
    $a_3 = (1; -1; 0; 0)$.
13. $a_1 = (0; 1; 1; 1)$,
    $a_2 = (0; 0; 1; 1)$,
    $a_3 = (0; 0; 0; 1)$.
14. $a_1 = (1; 1; -1; 1)$,
    $a_2 = (1; 1; 1; -1)$,
    $a_3 = (-1; 1; 1; 1)$.

15. a_1= (1; 2; –2;–1),
a_2= (–1; 0; 0;–1),
a_3= (0; –1; 1; 0).

16. a_1 = (1; 2; 3; 4),
a_2= (0; 1; –1; 0),
a_3= (0; –1; 2;–1).

17. a_1 = (1; 0; 1; 1),
a_2 = (0; 1; 1; 1),
a_3 = (1; 1; 1; 0).

18. a_1= (1;–1;–1;–1),
a_2= (1; 1;–1; –1),
a_3= (1; 1; 1; –1).

19. a_1= (–1; 1;–1; 1),
a_2= (1; –1; 1; 0),
a_3= (1; –1; 0; 0).

20. a_1= (2; 2; –2;–2),
a_2 = (1; 2; 2; 4),
a_3 = (1; 2; 2; 1).

21. a_1= (–2; 0;–2; 1),
a_2 = (1; 1; 1; 1),
a_3 = (0; 5; 1; 2).

22. a_1 = (2; 3; 0; 3),
a_2= (1; –1; 1; 1),
a_3 = (3; 2; 2; –4).

23. a_1 = (1; 1; 1; 1),
a_2 = (–1; 1; 0; 0),
a_3 = (0; 1; 0; –1).

24. a_1 = (–1;–1;–1;–1),
a_2 = (1; 1; 1; 0),
a_3 = (0; 0; 2; 3).

25. a_1 = (1; –1; –1; 1),
a_2= (1;–1; –1; –1),
a_3= (–1;–1;–1; –1).

26. a_1 = (1; 0; 1; 0),
a_2 = (1; 1; 0; 1),
a_3 = (0; 1; 1; 0).

27. a_1 = (1; 2; 3; 4),
a_2 = (0; 1; –1; 0),
a_3 = (0; –1; 2; –1).

28. a_1= (1; 1; 1; –1),
a_2= (1;–1; –1; 1),
a_3 = (1; 1; 0; 0).

29. a_1= (1; 1; –1; 1),
a_2= (1;–1; –1; 1),
a_3= (1;–1;–1;–1).

30. a_1 = (1; –1; 1; 1),
a_2 = (1; 1; –1; 1),
a_3 = (1; 1; 1; –1).

Задание 42. В евклидовом пространстве R^4 найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x на подпространство $U = L(a_1, a_2, a_3)$.

1. a_1 = (2; 3; 4; 0),
a_2 = (1; –1; 2; 0),
a_3 = (5; 0; 3; 0),
x = (4; 2; 3; –7).

2. a_1 = (1; 1; 1; 1),
a_2 = (6; 6; 3; 1),
a_3 = (1; 1; –1; –4),
x = (3; –1; 3; 4).

3. a_1 = (5; 5; 5; 1),
a_2 = (–2; –2; 6; 2),
a_3 = (6; 6; 0; –4),
x = (11; 3; 3; –3).

4. a_1 = (3; 1; 1; 3),
a_2 = (2; 1; 1; 2),
a_3 = (6; 2; 0; 6),
x = (3; 2; 0; 9).

5. a_1 = (1; –3; –3; 1),
a_2 = (3; –3; –3; –1),
a_3 = (3; 1; 1; 2),
x = (7; –2; –8; 2).

6. a_1 = (2; 3; 2; 1),
a_2 = (2; 1; 2; 1),
a_3 = (3; 5; 3; –1),
x = (–6; –1; 8; 3).

7. a_1 = (3; 4; 4; –2),
a_2 = (2; 1; 5; –2),
a_3 = (–2; 3; –3; –4),
x = (5; 1; 17; 6).

8. a_1 = (2; 1; 1; 2),
a_2 = (1; 5; 1; 5),
a_3 = (1; 5; 4; 2),
x = (7; 14; 6; 3).

9. $a_1 = (3; 2; 2; 5)$,
$a_2 = (1; 4; 4; 5)$,
$a_3 = (-2; -1; -1; 3)$,
$x = (0; -1; -5; 3)$.

10. $a_1 = (2; 3; 4; -5)$,
$a_2 = (-1; 2; -1; -2)$,
$a_3 = (0; 4; 3; -7)$,
$x = (8; -1; 10; -5)$.

11. $a_1 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_2 = (4; 2; 2; 4)$,
$a_3 = (-1; 3; 2; -2)$,
$x = (-3; 8; -1; 4)$.

12. $a_1 = (2; -2; 3; -3)$,
$a_2 = (1; 2; 3; -6)$,
$a_3 = (2; -3; 1; 0)$,
$x = (4; 7; 10; -13)$.

13. $a_1 = (0; 1; 2; -2)$,
$a_2 = (0; 4; -3; 1)$,
$a_3 = (0; 8; 2; -3)$,
$x = (6; 2; -5; 4)$.

14. $a_1 = (2; 3; 4; -3)$,
$a_2 = (1; -3; 2; -6)$,
$a_3 = (4; 1; 1; -4)$,
$x = (3; 2; 10; 1)$.

15. $a_1 = (3; 2; -2; 1)$,
$a_2 = (-1; -1; 1; 2)$,
$a_3 = (4; 3; -3; 1)$,
$x = (5; 7; 1; 6)$.

16. $a_1 = (2; 10; 5; 1)$,
$a_2 = (1; 7; 2; -1)$,
$a_3 = (1; 5; 4; -1)$,
$x = (-6; 13; 4; 2)$.

17. $a_1 = (2; 3; 1; -3)$,
$a_2 = (2; -1; 1; 1)$,
$a_3 = (5; -4; 3; 5)$,
$x = (4; 3; -4; -8)$.

18. $a_1 = (2; -4; 3; 2)$,
$a_2 = (1; 3; -3; -1)$,
$a_3 = (-1; -2; 2; 1)$,
$x = (9; 3; 7; -3)$.

19. $a_1 = (-4; 4; 3; 1)$,
$a_2 = (1; -1; 2; 1)$,
$a_3 = (-3; 3; 3; 2)$,
$x = (2; -2; 2; 5)$.

20. $a_1 = (2; 1; 1; 2)$,
$a_2 = (3; 0; 6; -2)$,
$a_3 = (-1; -3; 7; 0)$,
$x = (2; 0; 18; 2)$.

21. $a_1 = (-2; 0; -2; 1)$,
$a_2 = (1; 1; 1; 1)$,
$a_3 = (0; 5; 1; 2)$,
$x = (-11; 5; 11; 9)$.

22. $a_1 = (2; 3; 0; 3)$,
$a_2 = (1; -1; 1; 1)$,
$a_3 = (3; 2; 2; -4)$,
$x = (-6; 3; 7; 9)$.

23. $a_1 = (2; 3; -1; -8)$,
$a_2 = (-2; 0; 1; 5)$,
$a_3 = (-1; 5; -3; -13)$,
$x = (4; 5; -4; 3)$.

24. $a_1 = (4; 4; 3; -5)$,
$a_2 = (-1; -1; 8; 3)$,
$a_3 = (2; 2; 4; 7)$,
$x = (2; 12; 5; 4)$.

25. $a_1 = (2; 3; 3; 2)$,
$a_2 = (3; 1; 1; -2)$,
$a_3 = (4; -2; -2; 1)$,
$x = (4; -3; -9; 5)$.

26. $a_1 = (1; 2; 3; 0)$,
$a_2 = (4; -6; 8; -5)$,
$a_3 = (1; -3; 6; -4)$,
$x = (-1; -1; 5; 7)$.

27. $a_1 = (1; 2; 3; 4)$,
$a_2 = (1; 5; 4; 0)$,
$a_3 = (2; 4; -3; 17)$,
$x = (-6; 3; 5; 22)$.

28. $a_1 = (2; 3; 8; -8)$,
$a_2 = (1; 3; -4; 4)$,
$a_3 = (1;-1;-4; 4)$,
$x = (4; 5; 2; 2)$.

29. $a_1 = (2; 4; 3; -5)$,
$a_2 = (3; 2; 2; 2)$,
$a_3 = (1; -1; -4; 1)$,
$x = (-1; 9; 1; 2)$.

30. $a_1 = (2; 2; -1; -2)$,
$a_2 = (3; -2; 2; 4)$,
$a_3 = (1; 3; 0; 7)$,
$x = (7; -1; -9; 7)$.

Задание 43. Отображение f: $\boldsymbol{R}^3$® $\boldsymbol{R}^3$ задается правилом $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) \to \ldots$. Является ли это отображение линейным? Если является, то найти его матрицу в стандартном базисе.

1. $(\alpha_3, \alpha_2-5, \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)$.
2. $(\alpha_1+2\alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2-\alpha_1)$.
3. $(2\alpha_1-3, \alpha_2-\alpha_3, 0)$.
4. $(0, 0, 3\alpha_1-5\alpha_3)$.
5. $(0, -3\alpha_3+5\alpha_1-1, 4\alpha_2-\alpha_3)$.
6. $(\alpha_1^2-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3)$.
7. $(-6\alpha_2, 3\alpha_1-2\alpha_3, \alpha_2-\alpha_3)$.
8. $(-\alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_1)$.
9. $(-13+\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, 0)$.
10. $(-4\alpha_1+\alpha_2, 6\alpha_3, \alpha_2)$.
11. $(\alpha_1^3, 2\alpha_2, -\alpha_3)$.
12. $(-2\alpha_2, 3\alpha_2-\alpha_1, \alpha_3-1)$.
13. $(-\alpha_1, \alpha_2+2\alpha_1, 4\alpha_3+\alpha_2)$.
14. $(-\alpha_1-\alpha_2, 8\alpha_3+3, -3\alpha_3+\alpha_1)$.
15. $(0, 2\alpha_1-7\alpha_3, \alpha_2)$.
16. $(-1, 4\alpha_2, \alpha_3+4\alpha_2)$.
17. $(-\alpha_1, -\alpha_2+1, \alpha_3+4\alpha_2)$.
18. $(\alpha_1-\alpha_2, 2\alpha_3, \alpha_2^2)$.
19. $(2\alpha_1, 4\alpha_2, \frac{1}{2}\alpha_3)$.
20. $(-\alpha_3, \alpha_2-\alpha_1, -5\alpha_2+9\alpha_2)$.
21. $(6\alpha_1, -11\alpha_2+5, 4\alpha_3)$.
22. $(3\alpha_1-5\alpha_3, \alpha_3, 6\alpha_2+\alpha_1)$.
23. $(3\alpha_1, \alpha_2+8, -3\alpha_3+\alpha_1)$.
24. $(-7+\alpha_3, 3\alpha_2, -4\alpha_1)$.
25. $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 0, -3\alpha_3+7\alpha_1)$.
26. $(2\alpha_1, 3\alpha_3+\alpha_2, 4\alpha_3+\alpha_2)$.
27. $(-2\alpha_1+3\alpha_2, 3\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_3+8\alpha_1)$.
28. $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$.
29. $(\alpha_1, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)$.
30. $(3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 0, \alpha_1-\alpha_2)$.

Задание 44. Задана матрица M линейного оператора φ в стандартном базисе. Найти матрицу линейного оператора в базисе $A = (a_1, a_2, a_3)$, столбцы координат которого образуют матрицу T (первая матрица M, вторая T).

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 8 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 1 & 19 & -14 \\ 1 & 33 & -29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \\ 10 & -14 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 10 & -48 & -28 \\ 4 & -21 & -13 \\ -3 & 17 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 13 & 7 & -8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 10 & -29 & -10 \\ 1 & -3 & -1 \\ 7 & -20 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -24 & 1 & 0 \\ 63 & -21 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 19 & -9 & 2 \\ 32 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 11 & 13 & 4 \\ -6 & -7 & -2 \\ -8 & -10 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} -9 & -15 & -18 \\ -27 & 3 & -18 \\ 7 & 25 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} 6 & 14 & 19 \\ -18 & -42 & -57 \\ 12 & 18 & 38 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 13 & -14 & 5 \\ 26 & -28 & 10 \\ 19 & -20 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} -28 & 105 & -20 \\ -20 & 73 & -14 \\ -31 & 111 & -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} -6 & -15 & 36 \\ -8 & -17 & 42 \\ -5 & -11 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} 15 & 18 & -22 \\ -18 & -21 & 24 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$

25. $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

27. $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 8 & -18 & 10 \\ 28 & -36 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

28. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -10 & 4 & 6 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

29. $\begin{pmatrix} -28 & -28 & -13 \\ 22 & 22 & 10 \\ 12 & 12 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} -16 & 7 & 21 \\ -3 & 2 & 4 \\ -11 & 6 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Задание 45. Найти ранг, дефект, базис ядра и базис образа линейного оператора, матрица которого в стандартном базисе равна данной.

1. $\begin{pmatrix} -6 & -15 & 36 \\ -8 & -17 & 42 \\ -5 & -11 & 27 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 18 & -12 \\ 2 & 38 & -28 \\ 2 & 66 & -48 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 4 & -15 & -16 \\ 1 & -4 & -10 \\ -1 & 3 & -14 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 63 & 28 & -2 \\ -128 & -57 & 4 \\ 192 & 88 & -7 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -9 & 12 & -3 \\ -9 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} -22 & -22 & -15 \\ 16 & 16 & 12 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -9 & 48 & 30 \\ 3 & -15 & -9 \\ -7 & 36 & 22 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \\ 10 & -14 & 6 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$

18. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

19. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

20. $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}.$

21. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ -22 & -26 & -13 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & -3 \\ -7 & 11 & 24 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & -14 & -17 \\ -1 & 6 & 7 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 6 & 12 & 19 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} -4 & 16 & 12 \\ 1 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -2 & 18 & -12 \\ 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} -378 & 408 & -338 \\ -222 & 240 & -192 \\ 157 & -169 & 141 \end{pmatrix}$.

Задание 46. Линейный оператор имеет в стандартном базисе заданную матрицу. Существует ли базис, в котором оператор имеет диагональную матрицу? Если существует, то найти этот базис и вид диагональной матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 8 & -10 & 4 \\ 10 & -14 & 6 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -9 & 48 & 30 \\ 3 & -15 & -9 \\ -7 & 36 & 22 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \\ -22 & -26 & -13 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} -22 & -22 & -16 \\ 16 & 16 & 12 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -9 & 12 & -3 \\ -9 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} -6 & -15 & 36 \\ -8 & -17 & 42 \\ -5 & -11 & 27 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 4 \\ 8 & -13 & 6 \\ 9 & -15 & 7 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 9 & 22 & 31 \\ -23 & -54 & -77 \\ 14 & 32 & 46 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -1 & 9 & -6 \\ 1 & 19 & -14 \\ 1 & 33 & -24 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -2 & -5 & 12 \\ -1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

Задание 47. Поделить с остатком a на b.

1. $a = 512$; $b = -27$.
2. $a = -621$; $b = -41$.
3. $a = 606$; $b = -19$.
4. $a = -572$; $b = -43$.
5. $a = -985$; $b = 42$.
6. $a = -820$; $b = -23$.
7. $a = 959$; $b = -28$.
8. $a = -389$; $b = 21$.
9. $a = 856$; $b = -27$.
10. $a = -623$; $b = -18$.
11. $a = -666$; $b = -22$.
12. $a = -859$; $b = -34$.
13. $a = -734$; $b = 32$.
14. $a = 902$; $b = -31$.
15. $a = -988$; $b = -24$.
16. $a = 490$; $b = -18$.

17. $a = -642$; $b = 16$.
18. $a = 595$; $b = -31$.
19. $a = -552$; $b = 14$.
20. $a = -990$; $b = -24$.
21. $a = -824$; $b = 36$.
22. $a = 960$; $b = -34$.
23. $a = -398$; $b = -19$.
24. $a = 856$; $b = -27$.
25. $a = -603$; $b = -35$.
26. $a = -668$; $b = -31$.
27. $a = -878$; $b = -26$.
28. $a = -723$; $b = -23$.
29. $a = 917$; $b = -29$.
30. $a = -992$; $b = -42$.

Задание 48. Число a записано в p-ичной системе счисления. Наиболее рациональным способом перевести его в систему счисления по основанию q.

1. $p = 4$, $q = 8$, $a = 123113$.
2. $p = 8$, $q = 4$, $a = 3450$.
3. $p = 3$, $q = 9$, $a = 1021221$.
4. $p = 9$, $q = 3$, $a = 206$.
5. $p = 4$, $q = 16$, $a = 33033$.
6. $p = 16$, $q = 4$, $a = 373$.
7. $p = 8$, $q = 16$, $a = 10166$.
8. $p = 16$, $q = 8$, $a = 10(13)(12)$.
9. $p = 2$, $q = 4$, $a = 101000111$.
10. $p = 4$, $q = 2$, $a = 12230$.
11. $p = 2$, $q = 16$, $a = 110101111$.
12. $p = 16$, $q = 2$, $a = 213$.
13. $p = 4$, $q = 8$, $a = 22002$.
14. $p = 8$, $q = 4$, $a = 1403$.
15. $p = 8$, $q = 16$, $a = 10165$.
16. $p = 16$, $q = 8$, $a = 10(13)9$.
17. $p = 4$, $q = 8$, $a = 21300$.
18. $p = 16$, $q = 8$, $a = 1530$.
19. $p = 4$, $q = 8$, $a = 112113$.
20. $p = 8$, $q = 4$, $a = 3273$.
21. $p = 3$, $q = 9$, $a = 1120022$.
22. $p = 9$, $q = 3$, $a = 1646$.
23. $p = 4$, $q = 16$, $a = 201221$.
24. $p = 16$, $q = 4$, $a = 727$.
25. $p = 8$, $q = 16$, $a = 23044$.
26. $p = 16$, $q = 8$, $a = 2231$.
27. $p = 2$, $q = 4$, $a = 1101101011$.
28. $p = 4$, $q = 2$, $a = 13311$.
29. $p = 2$, $q = 16$, $a = 111000010$.
30. $p = 16$, $q = 2$, $a = 1(14)6$.

Задание 49. Число a записано в p-ичной системе. Прямым делением в этой системе перевести его в систему по основанию q.

Задача А

1. $p = 5$, $q = 11$, $a = 1030033$.
2. $p = 5$, $q = 12$, $a = 1041303$.
3. $p = 5$, $q = 13$, $a = 1420224$.
4. $p = 5$, $q = 14$, $a = 1143224$.
5. $p = 5$, $q = 15$, $a = 2004012$.
6. $p = 5$, $q = 16$, $a = 2022321$.
7. $p = 6$, $q = 11$, $a = 523044$.
8. $p = 6$, $q = 12$, $a = 531505$.
9. $p = 6$, $q = 13$, $a = 141244$.
10. $p = 6$, $q = 14$, $a = 150051$.
11. $p = 6$, $q = 15$, $a = 304323$.
12. $p = 6$, $q = 16$, $a = 242401$.
13. $p = 7$, $q = 11$, $a = 160421$.
14. $p = 7$, $q = 12$, $a = 163352$.
15. $p = 7$, $q = 13$, $a = 233564$.
16. $p = 7$, $q = 14$, $a = 236524$.
17. $p = 7$, $q = 15$, $a = 311136$.
18. $p = 7$, $q = 16$, $a = 314065$.

19. $p = 8$, $q = 11$, $a = 175470$.
20. $p = 8$, $q = 12$, $a = 177440$.
21. $p = 8$, $q = 13$, $a = 223237$.
22. $p = 8$, $q = 14$, $a = 225207$.
23. $p = 8$, $q = 15$, $a = 251006$.
24. $p = 8$, $q = 16$, $a = 252756$.
25. $p = 9$, $q = 11$, $a = 157840$.
26. $p = 9$, $q = 12$, $a = 160271$.
27. $p = 9$, $q = 13$, $a = 73778$.
28. $p = 9$, $q = 14$, $a = 100861$.
29. $p = 9$, $q = 15$, $a = 101104$.
30. $p = 9$, $q = 16$, $a = 107870$.

Задача Б

1. $p = 14$, $q = 7$, $a = 25583$.
2. $p = 14$, $q = 8$, $a = 11309$.
3. $p = 14$, $q = 9$, $a = 15326$.
4. $p = 15$, $q = 5$, $a = 109(14)8$.
5. $p = 15$, $q = 6$, $a = 13(13)(12)(14)$.
6. $p = 15$, $q = 7$, $a = 13(14)54$.
7. $p = 15$, $q = 8$, $a = 17334$.
8. $p = 15$, $q = 9$, $a = 1710(10)$.
9. $p = 16$, $q = 5$, $a = 13(14)\ (11)1$.
10. $p = 16$, $q = 6$, $a = 117(10)(12)$.
11. $p = 16$, $q = 7$, $a = (15)4(14)8$.
12. $p = 16$, $q = 8$, $a = 17987$.
13. $p = 16$, $q = 9$, $a = 156(12)(13)$.
14. $p = 11$, $q = 5$, $a = 45627$.
15. $p = 11$, $q = 6$, $a = 52098$.
16. $p = 11$, $q = 7$, $a = 52512$.
17. $p = 11$, $q = 8$, $a = 57887$.
18. $p = 11$, $q = 9$, $a = 58616$.
19. $p = 12$, $q = 5$, $a = 46974$.
20. $p = 12$, $q = 6$, $a = 45053$.
21. $p = 12$, $q = 7$, $a = 201(11)9$.
22. $p = 12$, $q = 8$, $a = 26646$.
23. $p = 12$, $q = 9$, $a = 26718$.
24. $p = 13$, $q = 5$, $a = 230(12)0$.
25. $p = 13$, $q = 6$, $a = 23176$.
26. $p = 13$, $q = 7$, $a = 28183$.
27. $p = 13$, $q = 8$, $a = 27(11)98$.
28. $p = 13$, $q = 9$, $a = 2(12)(12)56$.
29. $p = 14$, $q = 5$, $a = 232(10)0$.
30. $p = 14$, $q = 6$, $a = 2734(12)$.

Задание 50. Доказать делимость.

1. $n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4 \vdots 16$.
2. $n^4-2n^3+11n^2+62n \vdots 24$.
3. $n^4+3n^3-n^2-3n \vdots 6$.
4. $n^5-n \vdots 10$.
5. $n^7-n \vdots 42$.
6. $2n^3-3n^2+n \vdots 6$.
7. $9n^5-5n^3-4n \vdots 120$.
8. $n^3+11n \vdots 6$.
9. $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$.
10. $n^5-5n^3+4n \vdots 120$.
11. $n^6-61n^2 \vdots 60$.
12. $n^5-125n^3+4n \vdots 120$.
13. $n^4+2n^3+3n^2+2n \vdots 8$.
14. $6n^5+15n^4+10n^3-n \vdots 30$.
15. $2n^6-n^4-n^2 \vdots 36$.
16. $n = 2k+1 \Rightarrow n^3+3n^2-n-3 \vdots 48$
17. $n(n^2-1)(n^2-5n+26) \vdots 120$.
18. $n = 2k+1 \Rightarrow n^{12}-n^8-n^4+1 \vdots 512$.
19. $n^{k+4}-n^k \vdots 30$ ($k \in N$).
20. $n = 2k+1 \Rightarrow n^5-n \vdots 240$.
21. $n^7-5n^5+4n^3 \vdots 360$.
22. $n(n^2-49)(n^2+49) \vdots 30$.

23. $n = 2k+1 \Rightarrow n^4+7(7+2n^2) \vdots 64$.
24. $(n, 6) \Rightarrow n^2-1 \vdots 24$.
25. $n=2k+1,\ m=2s+1 \Rightarrow mn(m^4-n^4) \vdots 120$.
26. $(m^2n^3-4m^2n)(m^4+m^2-2) \vdots 216$.
27. $mn(m^2-n^2)(m^2+n^2) \vdots 30$.
28. $n^3+65n \vdots 6$.
29. $n^6+59n^2 \vdots 60$.
30. $n(2n+1)(7n+1) \vdots 6$.

Задание 51. Найти НОД и НОК a и b. Выразить НОД линейно ($d = xa + yb$).

1. 451, 3977.
2. 3102, 4277.
3. 901, 4717.
4. 1463, 6391.
5. 3289, 11297.
6. 1711, 4189.
7. 1891, 4087.
8. 1739, 2867.
9. 2911, 4189.
10. 3713, 4187.
11. 4399, 3403.
12. 5251, 4183.
13. 5551, 3367.
14. 6499, 5335.
15. 7171, 3131.
16. 9559, 3509.
17. 4067, 1127.
18. 8099, 2275.
19. 7553, 1411.
20. 8633, 1157.
21. 2291, 7663.
22. 2201, 6461.
23. 3367, 8099.
24. 2120, 4399.
25. 2679, 4503.
26. 3233, 1769.
27. 3953, 1541.
28. 4740, 3871.
29. 4970, 1917.
30. 4970, 923.

Задание 52. Поделить с остатком в кольце $\boldsymbol{Z}[i]$ a на b.

1. $a= -20+3i,\ b=2-3i$.
2. $a=9-6i.\ b=5+7i$.
3. $a=6-5i,\ b=1+3i$.
4. $a=15,\ b=4+i$.
5. $a=55+60i,\ b=-2+5i$.
6. $a=69-52i,\ b=11+i$.
7. $a=48-11i,\ b=3+6i$.
8. $a=38-101i,\ b=8+3i$.
9. $a=4-50i,\ b=-6+5i$.
10. $a=-58-19i, b=10-3i$.
11. $a=-46-4i,\ b=6+i$.
12. $a=-9-47i,\ b=-3+7i$.
13. $a = -16-47i,\ b=4i-5$.
14. $a=11+46i,\ b=3-7i$.
15. $a=12+i,\ b=3-i$.
16. $a=54+56i,\ b=7-13i$.
17. $a=73-46i,\ b=6-5i$.
18. $a=44+12i,\ b=5+7i$.
19. $a=39+17i,\ b=4-3i$.
20. $a=30-18i,\ b=1+7i$.
21. $a=-3-54i,\ b=2+8i$.
22. $a=83,\ b=8-3i$.
23. $a=46-7i,\ b=2+3i$.
24. $a=6+52i,\ b=7+i$.
25. $a=61+32i,\ b=8-3i$.
26. $a=79,\ b=3+5i$.

27. $a=66+39i$, $b=5+6i$.
28. $a=35-21i$, $b=2+5i$.
29. $a=47i-54$, $b=4i-12$.
30. $a=43i-48$, $b=5-2i$.

Задание 53. Простым или составным является элемент кольца $\boldsymbol{Z}[i]$?

1. $1+i$.
2. 2.
3. 5.
4. $2+i$.
5. 3.
6. $3+2i$.
7. $3+i$.
8. $1+5i$.
9. $3+4i$.
10. $1+4i$.
11. $2+5i$.
12. $3+5i$.
13. 13.
14. $4+5i$.
15. 7.
16. 11.
17. 17.
18. 23.
19. 19.
20. $2+3i$.
21. $-3+4i$.
22. $4-i$.
23. $5+i$.
24. $1-2i$.
25. $1-3i$.
26. $6+i$.
27. $-7+i$.
28. $4-3i$.
29. $1+10i$.
30. $8-3i$

Задание 54. Сократима ли дробь? Если сократима, то на какое число (в вариантах 11–30 элементы a и b взаимно простые).

1. $\dfrac{12n+5}{6n+3}$.
2. $\dfrac{6n+5}{8n+7}$.
3. $\dfrac{5n+2}{3n+2}$.
4. $\dfrac{21n+4}{14n+3}$.
5. $\dfrac{9n+8}{7n+4}$.
6. $\dfrac{n}{2n+1}$.
7. $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$.
8. $\dfrac{3n+2}{4n+3}$.
9. $\dfrac{7n+5}{3n+2}$.
10. $\dfrac{2n^2-1}{2n+1}$.
11. $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.
12. $\dfrac{a^3+b^3}{ab}$.
13. $\dfrac{a^3-b^3}{ab}$.
14. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.
15. $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.
16. $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$.
17. $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}$.
18. $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.
19. $\dfrac{a+b}{ab}$.
20. $\dfrac{a-b}{ab}$.
21. $\dfrac{5a+3b}{2a+b}$.
22. $\dfrac{7a+5b}{3a+2b}$.
23. $\dfrac{5a+3b}{3a+2b}$.
24. $\dfrac{13a+2b}{20a+3b}$.
25. $\dfrac{7a+2b}{11a+3b}$.

26. $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}$.

27. $\dfrac{a-b}{a+b}$.

28. $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$.

29. $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

30. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2b^2}$.

Задание 55. Найти порождающие элементы идеалов $(a) + (b)$ и $(a) \cap (b)$ и провести подробное доказательство.

1. $a = 48$, $b = 32$.
2. $a = 18$, $b = 24$.
3. $a = 14$, $b = 42$.
4. $a = 98$, $b = 21$.
5. $a = 68$, $b = 56$.
6. $a = 40$, $b = 100$.
7. $a = 27$, $b = 72$.
8. $a = 102$, $b = 68$.
9. $a = 68$, $b = 15$.
10. $a = 33$, $b = 121$.
11. $a = 63$, $b = 28$.
12. $a = 52$, $b = 169$.
13. $a = 82$, $b = 205$.
14. $a = 160$, $b = 120$.
15. $a = 50$, $b = 125$.
16. $a = 216$, $b = 72$.
17. $a = 45$, $b = 216$.
18. $a = 12$, $b = 16$.
19. $a = 14$, $b = 45$.
20. $a = 33$, $b = 15$.
21. $a = 28$, $b = 49$.
22. $a = 128$, $b = 36$.
23. $a = 360$, $b = 225$.
24. $a = 125$, $b = 200$.
25. $a = 300$, $b = 45$.
26. $a = 800$, $b = 192$.
27. $a = 49$, $b = 21$.
28. $a = 45$, $b = 81$.
29. $a = 54$, $b = 180$.
30. $a = 63$, $b = 280$.

Задание 56. Найти остаток от деления.

1. 383^{173} на 45.
2. 109^{345} на 14.
3. 439^{291} на 60.
4. 293^{275} на 48.
5. 66^{17} на 7.
6. 117^{53} на 11.
7. $3^{80} + 7^{80}$ на 11.
8. $3^{100} + 5^{100}$ на 7.
9. $2^{100} + 3^{100}$ на 5.
10. $5^{70} + 7^{50}$ на 12.
11. $5^{80} + 7^{100}$ на 13.
12. $5^{50} + 13^{100}$ на 18.
13. 54^{59} на 17.
14. 19^{67} на 12.
15. 317^{273} на 39.
16. 71^{50} на 67.
17. 267^{311} на 37.
18. 197^{157} на 35.
19. 4^{113} на 92.
20. 6^{76} на 26.
21. 21^{83} на 24.
22. 32^{150} на 25.
23. $17^{100} + 32^{100}$ на 7.
24. $5^{50} + 7^{70}$ на 9.
25. $335^{75} + 26^{73}$ на 9.
26. $15^{231} + 83^{9}$ на 14.
27. $15^{231} + 83^{9}$ на 16.
28. $12^{1231} + 14^{43}$ на 9.
29. 208^{208} на 23.
30. 2^{15783} на 25.

Задание 57. Образуют ли числа полную систему вычетов по какому-либо модулю? Если нет, то изменить несколько элементов так, чтобы получившаяся система образовывала полную систему вычетов. Составить из получившейся системы приведенную систему вычетов.

1. –84, –38, –725, 388, 73, –166, 155, –105, 426, –195, –127, 116.
2. 311, 503, 251, –744, –266, –2558, 452, –291.
3. –19, 18, 310, –300, 875, 273, –2162, 298, –814.
4. 30066, –90, –160, –680, –143, 205, –260, 254, 373, 402, –366.
5. 93, 240, –452, 685, –307, 495, –344.
6. 70, –501, –44, –77, –292, –816, –119, –215, 523, 327.
7. –1032, 125, –455, –17, 2243, 10, 228, 19.
8. 407, 510, –35, –166, 105, –356, 91, –249, –436, 565, 161, –254.
9. –142, 373, –260, –366, 254, 492, –90, –680, –160, 300, 205.
10. –1806, –2, –119, –211, –515, –78, –94, 503, 3900, 777.
11. 528, 119, 476, 648, 683, 62, 92, –201, –624, –603, –71.
12. 455, 17, –2246, –10, 1032, –228, –19,–125.
13. –73, 385, 155, 426, –166, –127, –38, 116, –105, –195, –725, –84.
14. –298, –300, –2162, 20, 273, –19, 875, –814, 310.
15. 91, 240, 495, –307, 685, –347, –452.
16. –74, –181, 258, 457, –177, 322, –165.
17. –160, –1715, –6201, –906, –519, –302, –65204, 622, 177, 924.
18. 754, 317, –99, –240, 267, –206, –298, –329, 554.
19. 407, –356, –436, –36, –249, 91, –254, 565, 161, –166, 105, 510.
20. –239, –88, –495, 307, 347, –685, 452.
21. –209, 555, 985, 333, 254, 422, 328, 601, 373, –669, 107.
22. –70, 63, 477, 528, –200, –603, 649, 683, –623, 129, 93.
23. 452, –311, 503, 291, –744, 266, 2558, –251.
24. 554, –298, –206, –240, 754, –102, 317, –3296, 267.
25. –160, –206, 177, –519, –6201, 622, –302, –65204, 923, –1715.
26. 2556, –311, 503, 291, –251, –744, 452, 266.
27. 452, 347, 304, –91, –240, –495, –685.
28. –669, 373, 985, 331, 107, –209, 553, 328, 254, 422, 601.
29. –452, –266, 744, –2558, –291, 311, –503, 251.
30. –555, 392, 713, –801, 900, –705, 1721, –414, –713, 278.

Задание 58. Решить сравнение первой степени.

1. $15x \equiv 21 \pmod{18}$.
2. $12x \equiv 16 \pmod{28}$.
3. $18x \equiv 12 \pmod{30}$.
4. $7x \equiv 15 \pmod{25}$.

5. $75x \equiv 54 \pmod{21}$.
6. $37x \equiv 16 \pmod{11}$.
7. $39x \equiv 5 \pmod{11}$.
8. $20x \equiv 35 \pmod{45}$.
9. $183x \equiv 93 \pmod{111}$.
10. $19x \equiv 4 \pmod{25}$.
11. $11x \equiv 15 \pmod{24}$.
12. $39x \equiv 19 \pmod{53}$.
13. $45x \equiv 21 \pmod{132}$.
14. $12x \equiv 15 \pmod{35}$.
15. $21x \equiv 10 \pmod{25}$.
16. $15x \equiv 7 \pmod{16}$.
17. $8x \equiv 17 \pmod{23}$.
18. $64x \equiv 51 \pmod{13}$.
19. $15x \equiv 21 \pmod{6}$.
20. $57x \equiv 15 \pmod{48}$.
21. $64x \equiv 5 \pmod{13}$.
22. $139x \equiv 7 \pmod{8}$.
23. $14x \equiv 9 \pmod{37}$.
24. $32x \equiv 13 \pmod{15}$.
25. $42x \equiv 105 \pmod{245}$.
26. $29x \equiv 35 \pmod{123}$.
27. $21x \equiv 15 \pmod{111}$.
28. $15x \equiv 120 \pmod{85}$.
29. $8x \equiv 15 \pmod{29}$.
30. $8x \equiv 17 \pmod{31}$.

Задание 59. Решить систему сравнений первой степени.

1. $x \equiv 10 \pmod{21}$,
   $x \equiv 6 \pmod{15}$,
   $x \equiv 19 \pmod{24}$.
2. $x \equiv 7 \pmod{15}$,
   $x \equiv 23 \pmod{35}$,
   $x \equiv 13 \pmod{20}$.
3. $3x \equiv 5 \pmod{7}$,
   $2x \equiv 3 \pmod{5}$,
   $3x \equiv 3 \pmod{9}$.
4. $x \equiv 2 \pmod{12}$,
   $x \equiv 12 \pmod{15}$,
   $x \equiv 3 \pmod{33}$.
5. $x \equiv 32 \pmod{40}$,
   $x \equiv 23 \pmod{72}$,
   $x \equiv 13 \pmod{24}$.
6. $x \equiv 6 \pmod{15}$,
   $x \equiv 18 \pmod{21}$,
   $x \equiv 3 \pmod{12}$.
7. $x \equiv 13 \pmod{14}$,
   $x \equiv 6 \pmod{35}$,
   $x \equiv 26 \pmod{45}$.
8. $x \equiv 19 \pmod{56}$,
   $x \equiv 3 \pmod{24}$,
   $x \equiv 7 \pmod{20}$.
9. $x \equiv 19 \pmod{22}$,
   $x \equiv 8 \pmod{33}$,
   $x \equiv 14 \pmod{21}$.
10. $4x \equiv 9 \pmod{7}$,
    $2x \equiv 15 \pmod{9}$,
    $5x \equiv 12 \pmod{13}$.
11. $3x \equiv 2 \pmod{13}$,
    $5x \equiv 11 \pmod{16}$,
    $5x \equiv 2 \pmod{9}$.
12. $3x \equiv 5 \pmod{13}$,
    $2x \equiv 17 \pmod{21}$,
    $5x \equiv 31 \pmod{32}$.
13. $x \equiv 1 \pmod{4}$,
    $x \equiv 3 \pmod{5}$,
    $x \equiv 2 \pmod{7}$.
14. $x \equiv 2 \pmod{3}$,
    $x \equiv 2 \pmod{7}$,
    $x \equiv -2 \pmod{11}$.
15. $3x \equiv 5 \pmod{14}$,
    $5x \equiv 1 \pmod{9}$,
    $7x \equiv 2 \pmod{25}$.
16. $7x \equiv 4 \pmod{15}$,
    $3x \equiv 23 \pmod{28}$,
    $5x \equiv 8 \pmod{11}$.

17. $2x \equiv 5 \pmod{21}$,
$5x \equiv 22 \pmod{31}$,
$4x \equiv 5 \pmod{29}$.
18. $3x \equiv 5 \pmod{12}$,
$7x \equiv 3 \pmod{25}$,
$3x \equiv 2 \pmod{17}$.
19. $x \equiv 8 \pmod{15}$,
$x \equiv 9 \pmod{13}$,
$x \equiv 5 \pmod{14}$.
20. $x \equiv 10 \pmod{11}$,
$x \equiv 9 \pmod{16}$,
$x \equiv 5 \pmod{7}$.
21. $x \equiv 5 \pmod{3}$,
$x \equiv 7 \pmod{10}$,
$x \equiv 2 \pmod{7}$.
22. $x \equiv 14 \pmod{19}$,
$x \equiv 5 \pmod{7}$,
$x \equiv 9 \pmod{10}$.
23. $x \equiv 8 \pmod{13}$,
$x \equiv 9 \pmod{17}$,
$x \equiv 5 \pmod{11}$.
24. $x \equiv 5 \pmod{9}$,
$x \equiv 3 \pmod{5}$,
$x \equiv 1 \pmod{7}$.
25. $x \equiv 12 \pmod{13}$,
$x \equiv 10 \pmod{11}$,
$x \equiv 5 \pmod{12}$.
26. $5x \equiv 2 \pmod{12}$,
$7x \equiv 2 \pmod{8}$,
$3x \equiv 1 \pmod{5}$.
27. $3x \equiv 8 \pmod{20}$,
$5x \equiv 8 \pmod{9}$,
$4x \equiv 1 \pmod{21}$,
28. $2x \equiv 9 \pmod{15}$.
$5x \equiv 4 \pmod{7}$,
$7x \equiv 3 \pmod{9}$.
29. $8x \equiv 1 \pmod{13}$,
$5x \equiv 7 \pmod{18}$,
$2x \equiv 1 \pmod{9}$.
30. $3x \equiv 1 \pmod{25}$,
$6x \equiv 3 \pmod{33}$,
$4x \equiv 5 \pmod{9}$.

Задание 60. Решить в целых числах уравнение.

1. $77x-16y = 7$.
2. $24x-37y = 35$.
3. $27x+31y = 29$.
4. $37x-29y = 53$.
5. $31x+55y = 77$.
6. $45x-37y = 25$.
7. $38x+114y = 209$.
8. $53x+47y = 11$.
9. $119x-68y = 34$.
10. $91x+117y = 156$.
11. $673x+103y = 2$.
12. $258x-172y = 112$.
13. $531x+118y = 112$.
14. $253x+1001y = 22$.
15. $311x-273y = 446$.
16. $1414x+406y = 42$.
17. $143x+169y = 5$.
18. $237x+44y = 1$.
19. $275x+145y = 10$.
20. $23x+49y = 53$.
21. $43x+37y = 21$.
22. $258x-172y = 56$.
23. $122x+129y = 2$.
24. $45x-37y = 25$.
25. $81x-48y = 33$.
26. $53x+47y = 100$.
27. $42x+31y = 67$.
28. $43x+35y = 21$.
29. $17x-25y = 117$.
30. $70x+33y = 2$.

Задание 61. Представить число в виде цепной дроби. Найти δ_3 и погрешность приближения числа с помощью δ_3.

1. $\frac{105}{38}$.
2. $\frac{245}{83}$.
3. $\frac{235}{69}$.
4. $\frac{46}{19}$.
5. $\frac{375}{824}$.
6. $\frac{990}{577}$.
7. $\frac{875}{576}$.
8. $-\frac{55}{117}$.
9. $\frac{71}{41}$.
10. $-\frac{187}{64}$.
11. $\frac{30}{37}$.
12. $\frac{127}{52}$.
13. $\frac{24}{35}$.
14. 1,23.
15. $-\frac{71}{41}$.
16. $\frac{157}{225}$.
17. $\frac{999}{2195}$.
18. 0,459.
19. $-\frac{251}{764}$.
20. 0,907.
21. $\frac{163}{59}$.
22. $\frac{22}{81}$.
23. $\frac{269}{106}$.
24. $-\frac{31}{99}$.
25. $\frac{43}{53}$.
26. $-\frac{177}{67}$.
27. $-\frac{241}{195}$.
28. $\frac{352}{1513}$.
29. $-\frac{182}{225}$.
30. $-\frac{64}{53}$.

Задание 62. Найти рациональное число, которое обращается в данную цепную дробь.

1. [0; 1, 2, 3, 4, 5].
2. [0; 2, 5, 14, 14].
3. [0; 2, 5, 1, 1, 2, 16].
4. [–1; 1, 2, 22, 1, 4, 2].
5. [0; 1, 9, 1, 3, 23].
6. [2; 1, 3, 4, 1, 2].
7. [0; 3, 1, 2, 7].
8. [2; 1, 1, 6, 8].
9. [–1; 1, 2, 5, 6].
10. [0; 1, 4, 3, 2, 1].
11. [–3; 2, 1, 3, 1, 4].
12. [–2; 1, 3, 4, 5, 2].
13. [0; 4, 3, 2, 1, 5, 6].
14. [–1; 5, 4, 3, 2, 1].
15. [–2; 1, 3, 1, 4, 2].
16. [2; 1, 3, 4, 2].
17. [2; 1, 19, 1, 3].
18. [3; 2, 2, 6, 2].
19. [2; 2, 2, 1, 2].
20. [0; 2, 5, 14, 1, 4].
21. [1; 1, 2, 1, 1, 13, 6].
22. [1; 1, 1, 12, 1, 1, 2, 4].
23. [–1; 1, 1, 7, 1, 6].
24. [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2].
25. [–2; 1, 30, 2].
26. [0; 1, 4, 3, 2].
27. [2; 2, 3, 1, 5].
28. [0; 1, 2, 5, 2].
29. [1; 4, 2, 1, 7].
30. [–2; 3, 1, 2, 1, 2].

Задание 63. Представить число в виде периодической цепной дроби.

1. $\sqrt{22}$.
2. $\sqrt{21}$.
3. $\sqrt{18}$.
4. $\sqrt{29}$.
5. $\sqrt{20}$.
6. $\sqrt{17}$.
7. $\sqrt{19}$.
8. $\sqrt{3}$.
9. $\sqrt{7}$.

10. $\sqrt{8}$.
11. $\sqrt{11}$.
12. $\sqrt{12}$.
13. $\sqrt{13}$.
14. $\sqrt{14}$.
15. $\sqrt{15}$.
16. $1-\sqrt{3}$.
17. $2-2\sqrt{2}$.
18. $1+\sqrt{6}$.
19. $\sqrt{23}$.
20. $\sqrt{31}$.
21. $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$.
22. $3+\frac{\sqrt{15}}{3}$.
23. $\frac{7+\sqrt{77}}{14}$.
24. $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.
25. $\frac{22+\sqrt{15}}{7}$.
26. $\frac{\sqrt{77}-3}{2}$.
27. $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$.
28. $\frac{2+\sqrt{7}}{4}$
29. $\frac{9+\sqrt{21}}{6}$
30. $\frac{9+\sqrt{101}}{5}$.

Задание 64. Найти действительное число, которое имеет данное представление в виде периодической цепной дроби.

1. [3; 3, 1, (2)].
2. [2; 1, 5, 2, 1,(2, 1)].
3. [4; (1, 3, 1, 8)].
4. [2; (1, 1, 1, 4)].
5. [2; (1, 4)].
6. [3; (3, 6)].
7. [3; (1, 2, 1, 6)].
8. [–1; 3, (1, 2)].
9. [4; (4, 8)].
10. [–1; 5, (1, 4)].
11. [3; (2, 6)].
12. [3; (1, 1, 1, 1, 6)].
13. [3; (1, 6)].
14. [4; 3, (2, 4)].
15. [5; (2, 1, 1, 2, 10)].
16. [1; 2, (3, 4)].
17. [4; (3, 2)].
18. [(5; 4, 3)].
19. [(2; 6, 1)].
20. [3; 1, (2, 3)].
21. [3; (2, 5)].
22. [(3; 2, 5)].
23. [(3; 2, 1, 4)].
24. [(3; 1, 4)].
25. [(1; 6, 5, 6)].
26. [4; (1, 3, 1, 8)].
27. [2; (3, 1)].
28. [4; (2, 8)].
29. [4; (1, 1, 2, 1, 1, 8)].
30. [2; (1, 7)].

Задание 65. Решить сравнение первой степени с помощью цепных дробей.

1. $32x \equiv 63 \pmod{119}$.
2. $69x \equiv 192 \pmod{201}$.
3. $37x \equiv 5 \pmod{217}$.
4. $271x \equiv 25 \pmod{119}$.
5. $91x \equiv 143 \pmod{222}$.
6. $143x \equiv 41 \pmod{221}$.
7. $82x \equiv 14 \pmod{202}$.
8. $354x \equiv 567 \pmod{639}$.
9. $67x \equiv 64 \pmod{183}$.
10. $89x \equiv 86 \pmod{241}$.
11. $213x \equiv 137 \pmod{516}$.
12. $111x \equiv 81 \pmod{447}$.
13. $186x \equiv 374 \pmod{422}$.
14. $129x \equiv 321 \pmod{471}$.
15. $-50x \equiv 67 \pmod{177}$.
16. $-73x \equiv 60 \pmod{311}$.
17. $-53x \equiv 84 \pmod{219}$.
18. $143x \equiv 75 \pmod{119}$.
19. $13x \equiv 178 \pmod{153}$.
20. $243x \equiv 271 \pmod{317}$.
21. $221x \equiv 111 \pmod{360}$.
22. $141x \equiv 73 \pmod{320}$.
23. $139x \equiv 118 \pmod{239}$.
24. $327x \equiv 78 \pmod{379}$.
25. $239x \equiv 302 \pmod{471}$.
26. $23x \equiv 667 \pmod{693}$.
27. $57x \equiv 15 \pmod{482}$.
28. $21x \equiv 15 \pmod{111}$.
29. $15x \equiv 120 \pmod{851}$.
30. $2560x \equiv 45 \pmod{3605}$.

Задание 66. Решить сравнение.

1. $6x^{10}-12x+1 \equiv 0 \pmod 5$.
2. $x^5-2x^3+x^2-2 \equiv 0 \pmod 3$.
3. $x^5-7x^4+9x^2-x+13 \equiv 0 \pmod 3$.
4. $x^7-x^6+5x^2-3 \equiv 0 \pmod 5$.
5. $x^5+x^4+x^3-x^2-2 \equiv 0 \pmod 5$.
6. $x^7-6 \equiv 0 \pmod 5$.
7. $x^8+2x^7+x^5-x^4-x+3 \equiv 0 \pmod 5$.
8. $6x^4+17x^2-16 \equiv 0 \pmod 3$.
9. $4x^7-2x^3+8 \equiv 0 \pmod 5$.
10. $x^7-2x^6+2x^2+13 \equiv 0 \pmod 5$.
11. $x^{12}+2x^{11}-2x-1 \equiv 0 \pmod{11}$.
12. $x^{10}+x^8+x^7-x^4-x^2+4x-3 \equiv 0 \pmod 7$.
13. $x^{29}+3x^{15}+x^{11}-3x^5+9x^2+10x-5 \equiv 0 \pmod{11}$.
14. $x^{12}-2x^7+x^3+1 \equiv 0 \pmod 5$.
15. $x^{14}-4x^{13}-x+6 \equiv 0 \pmod{13}$.
16. $x^{12}-2x^7+x^3+1 \equiv 0 \pmod 5$.
17. $13x^{23}-8x^{22}-2x^{13}+1 \equiv 0 \pmod{11}$.
18. $10x^{91}+x^{11}+9x^2-x+6 \equiv 0 \pmod{11}$.
19. $10x^{42}-5x^{30}+2x^2+4 \equiv 0 \pmod{17}$.
20. $28x^9+x^8-28x^7+x^4+23 \equiv 0 \pmod 3$.
21. $34x^{10}+x^7+3x^4+x+37 \equiv 0 \pmod 5$.
22. $x^{12}-53x^{11}-24x^6-x+1 \equiv 0 \pmod 7$.
23. $x^{10}-2x+1 \equiv 0 \pmod 5$.
24. $x^8+2x^7-x^4+3 \equiv 0 \pmod 5$.
25. $x^{16}+3x^8-x^4+x-2 \equiv 0 \pmod 7$.
26. $x^{10}+x^8-x^4-x^2+5x-3 \equiv 0 \pmod 7$.
27. $x^{101}+6x^5+9x^2-5 \equiv 0 \pmod{11}$.
28. $x^{14}-x^{13}-x^2+2x+1 \equiv 0 \pmod{13}$.
29. $323x^{90}+164x^{67}-1 \equiv 0 \pmod{23}$.
30. $2x^{35}-9x^{15}+13x^8+x+5 \equiv 0 \pmod{11}$.

Задание 67. Найти порядок элемента a по модулю m.

1. $a = 6$, $m = 23$.
2. $a = 3$, $m = 25$.
3. $a = 7$, $m = 29$.
4. $a = 27$, $m = 47$.
5. $a = 2$, $m = 17$.
6. $a = 5$, $m = 17$.
7. $a = 10$, $m = 13$.
8. $a = 10$, $m = 31$.
9. $a = 13$, $m = 53$.
10. $a = 18$, $m = 29$.
11. $a = 5$, $m = 61$.
12. $a = 10$, $m = 47$.
13. $a = 32$, $m = 61$.
14. $a = 32$, $m = 71$.
15. $a = 2$, $m = 35$.
16. $a = 3$, $m = 55$.
17. $a = 10$, $m = 17$.
18. $a = 97$, $m = 17$.
19. $a = 18$, $m = 11$.
20. $a = 23$, $m = 41$.
21. $a = 6$, $m = 59$.
22. $a = 14$, $m = 59$.
23. $a = 3$, $m = 17$.
24. $a = 3$, $m = 19$.
25. $a = 5$, $m = 18$.
26. $a = 5$, $m = 23$.
27. $a = 18$, $m = 41$.
28. $a = 8$, $m = 19$.
29. $a = 15$, $m = 23$.
30. $a = 18$, $m = 23$.

Задание 68. Решить сравнение с помощью индексов.

1. $2^x \equiv 7 \pmod{67}$.
2. $13^x \equiv 12 \pmod{47}$.
3. $x^{27} \equiv 39 \pmod{43}$.
4. $8x^{26} \equiv 37 \pmod{41}$.
5. $25x^7 \equiv -7 \pmod{31}$.
6. $20^x \equiv 21 \pmod{41}$.
7. $37x^{15} \equiv 62 \pmod{73}$.
8. $5x^4 \equiv 3 \pmod{11}$.
9. $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$.
10. $2x^3 \equiv 17 \pmod{41}$.

11. $27x^5 \equiv 25 \pmod{31}$.
12. $11x^3 \equiv 6 \pmod{79}$.
13. $23x^3 \equiv 15 \pmod{73}$.
14. $52^x \equiv 38 \pmod{61}$.
15. $37x^8 \equiv 59 \pmod{61}$.
16. $18x^8 \equiv 6 \pmod{13}$.
17. $x^{12} \equiv 37 \pmod{41}$.
18. $x^{55} \equiv 17 \pmod{97}$.
19. $x^{35} \equiv 17 \pmod{67}$.
20. $x^{30} \equiv 46 \pmod{73}$.
21. $x^8 \equiv 23 \pmod{41}$.
22. $x^5 \equiv 74 \pmod{71}$.
23. $16^x \equiv 11 \pmod{53}$.
24. $x^8 \equiv 29 \pmod{13}$.
25. $12^x \equiv 17 \pmod{31}$.
26. $13x^8 \equiv -36 \pmod{61}$.
27. $7x^{13} \equiv -23 \pmod{47}$.
28. $19x^5 \equiv -13 \pmod{53}$.
29. $23^x \equiv 37 \pmod{41}$.
30. $5x^{11} \equiv -19 \pmod{29}$.

Задание 69. Представить многочлен $f(x)$ по степени двучлена $x-\alpha$.

1. $f(x) = x^3-8x^2+23x-24$, $\alpha = 2$.
2. $f(x) = x^4-7x^3+3x^2+63x-108$, $\alpha = 2$.
3. $f(x) = x^5-4x^3+6x^2-8x+10$, $\alpha = 2$.
4. $f(x) = x^4-2x^2+3$, $\alpha = -1$.
5. $f(x) = 2x^3+13x^2+25x+14$, $\alpha = -2$.
6. $f(x)=3x^4+24x^3+70x^2+87x+38$, $\alpha =-2$.
7. $f(x) = x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $\alpha = 2$.
8. $f(x) = x^5$, $\alpha = 1$.
9. $f(x) = x^3-9x^2+27x-27$, $\alpha = 3$.
10. $f(x) = x^3-5x^2+3x+9$, $\alpha = 3$.
11. $f(x) = 2x^3-18x^2+108$, $\alpha = 3$.
12. $f(x) = 3x^3-81x+162$, $\alpha = 3$.
13. $f(x) = x^4-12x^3+54x^2-108x+81$, $\alpha = 3$.
14. $f(x) = x^4-6x^3+18x^2-54x+81$, $\alpha = 3$.
15. $f(x) = x^4+3x^2+1$, $\alpha = -1$.
16. $f(x) = 2x^5-x^3-2x^2-6x+10$, $\alpha = 2$.
17. $f(x) = 4x^3-2x^2+5x-1$, $\alpha = 2$.
18. $f(x) = x^4-4x^3+5x-2$, $\alpha = 3$.
19. $f(x) = x^4+7x^3+4x^2-25x+1$, $\alpha = -5$.
20. $f(x) = x^4-8x^3+24x^2-50x+22$, $\alpha = 2$.
21. $f(x) = x^4+3x^3-4x^2+6x-5$, $\alpha = -2$.
22. $f(x) = 2x^5-3x^3+6x^2-8x-4$, $\alpha = 3$.
23. $f(x) = 4x^3-2x^2+5x+11$, $\alpha = 2$.
24. $f(x) = 3x^4+8x^3-2x^2+6x-5$, $\alpha = -3$.
25. $f(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $\alpha = -1$.
26. $f(x) = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$, $\alpha = 2$.
27. $f(x) = x^5+9x^4+32x^3+57x^2+51x+18$, $\alpha = -2$.
28. $f(x) = x^6-12x^5+60x^4-161x^3+246x^2-204x+72$, $\alpha = 2$.

29. $f(x) = x^5-11x^4+49x^3-111x^2+129x-63$, $\alpha = 2$.
30. $f(x) = x^6+12x^5+59x^4+152x^3+215x^2+156x+45$, $\alpha = -2$.

Задание 70. Выделить кратные множители многочлена.

1. $x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8$.
2. $2x^5+3x^4+4x^3+x^2-1$.
3. $2x^6+6x^5+6x^4+x^3-3x^2-3x-1$.
4. $x^6+6x^5+3x^4+6x^3+9x^2+12x+3$.
5. $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$.
6. $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$.
7. $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$.
8. $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$.
9. $x^6-2x^5-x^4-2x^3+5x^2+4x+4$.
10. $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1$.
11. $8x^5-20x^4-10x^3+25x^2+20x+4$.
12. $x^5-15x^3-10x^2+60x+72$.
13. $x^6+2x^5+x^4-x^2-2x-1$.
14. $x^9+x^8-2x^5-2x^4+x+1$.
15. $x^5-x^3-4x^2-3x-2$.
16. $4x^5+15x^4+20x^3+10x^2-1$.
17. $8x^5-28x^4+38x^3-25x^2+8x-1$.
18. $x^6+3x^5+3x^4-x^3-6x^2-6x-2$.
19. $3x^6+12x^5+9x^4+6x^3+3x^2+6x+1$.
20. $4x^6+12x^5+9x^4-4x^3-6x^2+1$.
21. $4x^5+15x^4+20x^3+10x^2-1$.
22. $8x^5-20x^4+24x^3-16x^2+6x-1$.
23. $4x^6+4x^5+5x^4-2x^3-x^2-2x+1$.
24. $2x^5-5x^4+x^3-6x^2+12x+8$.
25. $8x^5+12x^4-6x^3+x^2-5x+2$.
26. $16x^5-16x^4-72x^3-64x^2-23x-3$.
27. $4x^5+20x^4+25x^3-10x^2-20x+8$.
28. $3x^5+23x^4+64x^3+72x^2+16x-16$.
29. $2x^5+11x^4+18x^3+8x^2-4x-3$.
30. $3x^5+4x^4-8x^3-18x^2-11x-2$.

Задание 71. Составить многочлен степени ≤ 3, график которого проходит через заданные точки.

1. (0; 3), (1; 5), (–1; –1), (2; 17).
2. (0; 5), (1; 6), (–1; 4), (–2; –3).
3. (0; 3), (1; –3), (2; –7), (–1; 11).
4. (0; 2), (1; 5), (–1; –3), (–2; –16).
5. (0; 2), (1; 7), (–1; –1), (–2; –8).
6. (0; –8), (1; –5), (–1; –11), (2; 10).
7. (0; 1), (1; –3), (–1; 9), (2; –3).
8. (0; 3), (1; 8), (–1; 10), (2; 19).
9. (0; –4), (1; –4), (–1; –8), (2; –2).
10. (0; 3), (1; 4), (–1; 2), (–3; –24).
11. (0; 1), (1; –1), (–1; 3), (2; 9).
12. (0; 2), (1; 5), (–1; –1), (–2; –22).
13. (0; –1), (1; 3), (–1; –5), (2; 7).
14. (0; 1), (1; 0), (–1; 12), (2; 9).
15. (0; 3), (1; 7), (–1; –1), (2; –1).
16. (0; –1), (1; 2), (–1; –2), (–2; –7).
17. (0; 1), (1; 4), (–1; 0), (–2; –5).
18. (0; 2), (1; 6), (–1; 4), (–2; 6).
19. (0; 4), (1; 6), (–1; 10), (2; 4).
20. (0; –5), (1; 2), (–1; 0), (–2; 17).
21. (0; 2), (1; 0), (–1; 4), (2; 4).
22. (0; 1), (1; –1), (–1; –5), (2; 1).
23. (0; 2), (1; 2), (–1; –2), (2; 10).
24. (0; 4), (1; 2), (–1; 10), (2; –2).
25. (0; 0), (1; 5), (–1; –5), (2; 22).
26. (0; –2), (1; –3), (–1; 9), (2; 6).
27. (0; 1), (1; 0), (–1; 2), (2; 5).
28. (0; 12), (1; 15), (–1; 9), (–2; –12).
29. (0; –4), (1; –4), (–1; 0), (–2; 2).
30. (0; 1), (1; 2), (–1; 0), (–2; –7).

Задание 72. Найти рациональные корни многочлена. Разложить многочлен на неприводимые над $\boldsymbol{Q}$ множители.

1. $4x^5-4x^4+5x^3-14x^2-21x-6$.
2. $2x^5-x^4-10x^3-10x^2-12x-9$.
3. $4x^5-14x^4+14x^3-13x^2+12x+12$.
4. $6x^5-3x^4+26x^3-13x^2+8x-4$.
5. $8x^5+32x^4-50x^3-38x^2+57x-15$.
6. $18x^5+48x^4+71x^3+124x^2+65x+10$.
7. $3x^5-13x^4+2x^3+17x^2+33x+18$.
8. $x^5+5x^4-6x^3-30x^2+8x+40$.
9. $6x^5-25x^4-34x^3+44x^2+7x-10$.
10. $x^5-3x^4-x^3-x^2+8x+12$.
11. $9x^5+x^4-108x^3-12x^2+243x+27$.
12. $8x^5+32x^4-6x^3-24x^2+x+4$.
13. $7x^5+29x^4-17x^3-73x^2+46x+8$.
14. $3x^5+8x^4-12x^3-42x^2-15x+10$.
15. $10x^5-5x^4-42x^3+21x^2+8x-4$.
16. $6x^5+21x^4+14x^3-5x^2+4x-4$.
17. $9x^5+12x^4+10x^3+10x^2+x-2$.
18. $12x^5+12x^4-13x^3+14x^2-14x+4$.
19. $4x^5-8x^4+13x^3-26x^2+3x-6$.
20. $15x^5-57x^4+38x^3+50x^2-32x-8$.
21. $10x^5+65x^4+124x^3+71x^2+48x+18$.
22. $18x^5+33x^4+17x^3+2x^2-13x+3$.
23. $40x^5+8x^4-30x^3-6x^2+5x+1$.
24. $10x^5-7x^4-44x^3+34x^2+25x-6$.
25. $12x^5+8x^4-x^3-x^2-3x+1$.
26. $27x^5+243x^4-12x^3-108x^2+x+9$.
27. $4x^5+x^4-24x^3-6x^2+32x+8$.
28. $8x^5+46x^4-73x^3-17x^2+29x+7$.
29. $10x^5-15x^4-42x^3-12x^2+8x+3$.
30. $4x^5-8x^4-21x^3+42x^2+5x-10$.

Задание 73. Разложить многочлен на неприводимые над ***Q*** множители, используя метод Кронекера.

1. $2x^4-x^3+2x^2+1$.
2. $x^4+4x^3+2x^2-4x+1$.
3. $x^4+2x^3+x^2-1$.
4. $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.
5. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
6. $x^4-2x^3+x^2-1$.
7. x^4-x^2+2x-1.
8. $x^4-4x^3+2x^2+4x+1$.
9. $x^4-x^3-4x^2+x+1$.
10. x^4+3x-2.
11. $x^4-2x^3-x^2+2x+1$.
12. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
13. $x^4+x^3+3x^2+2x+2$.
14. $x^4-x^3-x^2+2x-2$.
15. x^4-3x-2.
16. $x^4-6x^3+7x^2+6x+1$.
17. $x^4+2x^3-3x^2-4x-1$.
18. $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$.
19. $x^4-2x^3-3x^2-4x-1$.
20. $x^4-4x^3+3x^2-2x-1$.
21. $x^4-4x^3+x^2+4x+1$.
22. $x^4+2x^3-5x^2-2x+1$.
23. $x^4+4x^3+x^2-4x+1$.
24. $x^4-2x^3-5x^2+2x+1$.
25. $x^4+6x^3+11x^2+6x+1$.
26. x^4+2x^2+x+2.
27. $x^4-x^3+2x^2-x+1$.
28. x^4+2x^2-x+2.
29. x^4-2x^2-3x-2.
30. $x^4+2x^3+2x^2+x-2$.

Задание 74. Разложить на неприводимые над ***C*** и над ***R*** множители.

1. x^5+x^3+x.
2. $x^4-x^3+2x^2+x-3$.
3. $x^4+x^3+3x^2+x+2$.
4. $x^5-x^4+5x^3-5x^2+9x-9$.
5. $27x^4-9x^2+14x-4$.
6. x^6+27.
7. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$.
8. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$.
9. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.
10. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.
11. $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$.
12. $4x^4-24x^3+29x^2+42x-63$.

13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.
14. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
15. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$.
16. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.
17. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$.
18. $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$.
19. $x^4-2x^3-11x^2+12x+36$.
20. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15$.
21. $x^4+2x^3-x^2+2x+1$.
22. $12x^4-4x^3-9x^2+1$.
23. $x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$.
24. $x^4-x^3+2x^2+x-3$.
25. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.
26. $x^4-4x^3+8x^2-16x+16$.
27. $6x^4+5x^3-74x^2+11x+12$.
28. $10x^4+21x^3-55x^2-72x+36$.
29. $x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$.
30. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$.

Задание 75. Известно, что α является корнем многочлена $f(x)$. Найти остальные корни многочлена и разложить его на неприводимые множители над $\boldsymbol{C}$, над $\boldsymbol{R}$ и над $\boldsymbol{Q}$.

1. $f(x) = x^4-2x^3+3x^2-2x+2$, $\alpha = 1+i$.
2. $f(x) = x^4-4x^3+3x^2+8x-10$, $\alpha = 2-i$.
3. $f(x) = x^4+3x^3+5x^2+4x+2$, $\alpha = -1+i$.
4. $f(x) = x^4-2x^3+7x^2-4x+10$, $\alpha = 1-2i$.
5. $f(x) = x^4-5x^3+3x^2+16x-10$, $\alpha = 3-i$.
6. $f(x) = x^4+7x^3+14x^2+3x-15$, $\alpha = -2+i$.
7. $f(x) = x^4+4x^3+6x^2+4x-15$, $\alpha = -1-2i$.
8. $f(x) = x^4-2x^3+x^2-8x-12$, $\alpha = 2i$.
9. $f(x) = x^4-4x^3+5x^2+12x-24$, $\alpha = 2+2i$.
10. $f(x) = x^4-2x^3+12x^2-4x+20$, $\alpha = 1-3i$.
11. $f(x) = x^4+4x^3-4x^2-32x-20$, $\alpha = -3+i$.
12. $f(x) = x^4+5x^3+6x^2-19x-13$, $\alpha = -3+2i$.
13. $f(x) = x^4-4x^3+10x^2+12x-39$, $\alpha =2-3i$.
14. $f(x) = x^4+5x^3+14x^2+26x-20$, $\alpha=-1+3i$.
15. $f(x) = x^4+x^3+6x^2+9x-27$, $\alpha = -3i$.
16. $f(x) = x^4-7x^3+14x^2+17x-65$, $\alpha = 3-2i$.
17. $f(x) = x^4+2x^3+2x^2-38x-39$, $\alpha = -2+3i$.
18. $f(x) = x^4-x^3-2x^2-3x-1$, $\alpha = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $f(x) = x^4-x^2+2x-1$, $\alpha = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
20. $f(x) = x^4+6x^3+14x^2-12x-36$, $\alpha = -3+3i$.
21. $f(x) = x^4+4x^3+16x^2+12x+39$, $\alpha = -2+3i$.
22. $f(x) = x^4-x^3-12x^2-9x-27$, $\alpha = 3i$.
23. $f(x) = x^4+2x^3-5x^2-36x-40$, $\alpha = -2-2i$.
24. $f(x) = x^4+4x^3-3x^2-50x-52$, $\alpha = -3-2i$.
25. $f(x) = x^4+x^3+15x^2+43x+68$, $\alpha = 1-4i$.
26. $f(x) = x^4+9x^3+27x^2+33x+34$, $\alpha = -4+i$.

27. $f(x) = x^4-5x^3+25x^2-24x+20$, $\alpha = 2-4i$.
28. $f(x) = x^4+8x^3+22x^2+16x+40$, $\alpha = -4+2i$.
29. $f(x) = x^4-8x^3+22x^2+24x-75$, $\alpha = 4+3i$.
30. $f(x) = x^4+3x^3+10x^2-57x+75$, $\alpha = -3+4i$.

Задание 76. Выразить симметрический многочлен через элементарные симметрические. Считая x_i корнями многочлена $f(x)$, вычислить значение этого выражения.

1. $x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_1^2x_2^2-x_1^2x_3^2-x_2^2x_3^2$, $f(x) = 2x^3+5x-8$.
2. $S(x_1^4x_2)$, $f(x) = -x^3+5x^2+7$.
3. $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$, $f(x) = 5x^3+2x^2-3x$.
4. $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$, $f(x) = 2x^4+5x^3+x^2-6x$.
5. $S(x_1^4)$, $f(x) = 3x^4+2x^2+5x+1$.
6. $S(x_1^2x_2)$, $f(x) = 4x^4-x^3+2x^2+12x+126$.
7. $S(x_1^2x_2^2)$, $f(x) = 2x^4+3x^3+5x^2-7x+11$.
8. $S(x_1^3x_2^2)$, $f(x) = -2x^4+6x^2+8x-9$.
9. $S(x_1^3x_2^3)$, $f(x) = x^4-2x^3-2x^2-2x-2$.
10. $S(x_1^4x_2x_3)$, $f(x) = 3x^4-2x^3+2x^2-6x+10$.
11. $S(x_1^3x_2x_3)$, $f(x) = 4x^3+5x^2-6x+2$.
12. $S(x_1^3x_2)$, $f(x) = 3x^3+x^2-2x-4$.
13. $S(x_1^4)$, $f(x) = 3x^3-2x+5$.
14. $(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)^2(x_2+x_3)^2$, $f(x) = 2x^3+3x^2+4$.
15. $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2$, $f(x) = 8x^3+4x^2+2x+1$.
16. $(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2+x_3)^2$, $f(x) = x^4-x^3+2x^2-3x+4$.
17. $x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2$, $f(x) = x^3-3x+2$.
18. $(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$, $f(x) = 3x^3-2x^2+1$.
19. $x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$, $f(x) = x^3-x^2+2x+1$.
20. $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$, $f(x) = 2x^3+2x^2+x-1$.
21. $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$, $f(x) = 2x^3+x^2-3x-3$.
22. $S(x_1^4x_2^2)$, $f(x) = x^3+px+q$.
23. $(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)$, $f(x) = x^3+px+q$.
24. $S(x_1^3x_2)$, $f(x) = 2x^3+2x^2+4$.
25. $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_1^2+x_1x_3+x_3^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)$, $f(x) = 5x^3-6x^2+7x-8$.
26. $(x_1-x_2)^2x_3+(x_1-x_3)^2x_2+(x_2-x_3)^2x_1$, $f(x) = 3x^3+6x^2-x+8$.
27. $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1+x_3-x_4-x_2)(x_1+x_4-x_3-x_2)$, $f(x) = x^4+px^3+qx+r$.
28. $x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_1^2x_2^2-x_1^2x_3^2-x_2^2x_3^2$, $f(x) = x^3+px+q$.
29. $(x_1+x_2)^4(x_1+x_3)^4(x_2+x_3)^4$, $f(x) = x^3+px+q$.
30. $S(x_1^3x_2x_3)$, $f(x) = x^3-2x^2-2x+2$.

Задание 77. Подобрать параметр k так, чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень.

1. $f(x) = x^2 - x + k$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - k$.
2. $f(x) = x^2 + kx - 6$, $g(x) = x^3 - kx^2 - 4x - 4$.
3. $f(x) = x^2 + kx + 2$, $g(x) = x^3 - kx - 2$.
4. $f(x) = x^2 - kx - 2$, $g(x) = x^3 + x^2 + kx + 1$.
5. $f(x) = x^2 + 2x + k$, $g(x) = x^3 - x^2 - x + k$.
6. $f(x) = x^2 + kx - 2$, $g(x) = x^3 + x^2 - x + k$.
7. $f(x) = x^2 + 3x - k$, $g(x) = x^3 - 3x + k$.
8. $f(x) = 2x^2 + 3x + k$, $g(x) = x^3 + x^2 + 2x - k$.
9. $f(x) = x^2 + kx - 2$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - kx - 2$.
10. $f(x) = x^2 - x + k$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$.
11. $f(x) = 2x^2 + kx - 1$, $g(x) = 2x^3 - kx^2 + 2x - 1$.
12. $f(x) = 2x^2 + x + k$, $g(x) = 2x^3 + kx^2 + 2x - 1$.
13. $f(x) = 2x^2 + kx - 1$, $g(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - k$.
14. $f(x) = 2x^2 + x + k$, $g(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + k$.
15. $f(x) = x^2 + kx - 2$, $g(x) = x^3 + kx^2 - x + 1$.
16. $f(x) = 2x^2 + kx + 1$, $g(x) = 2x^3 + kx^2 - 1$.
17. $f(x) = 2x^2 + 3x + k$, $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - k$.
18. $f(x) = x^2 + x - 2k$, $g(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.
19. $f(x) = 2x^2 + kx - 1$, $g(x) = x^3 + kx^2 + x + 1$.
20. $f(x) = 2x^2 - x - k$, $g(x) = x^3 - x^2 - kx + 1$.
21. $f(x) = x^2 + kx + 2$, $g(x) = x^3 - kx + 2$.
22. $f(x) = x^2 + kx - 3$, $g(x) = x^3 + kx - 3$.
23. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^3 - 3x + k$.
24. $f(x) = x^2 + kx - 2$, $g(x) = x^3 + kx^2 - 5x + 3$.
25. $f(x) = x^2 - kx - 30$, $g(x) = x^3 + kx^2 - 16x - 20$.
26. $f(x) = x^2 + 6x + k$, $g(x) = x^3 + x^2 - kx - 12$.
27. $f(x) = x^2 + kx + 1$, $g(x) = x^3 + kx + 1$.
28. $f(x) = x^2 + kx - 2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + kx + 2$.
29. $f(x) = x^2 + kx - 1$, $g(x) = x^3 + kx^2 + x - 2$.
30. $f(x) = x^2 + kx - 3$, $g(x) = x^3 + kx^2 - 9$.

Задание 78. Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби.

1. $\dfrac{2\sqrt[4]{27} + \sqrt{3} - \sqrt[4]{3} + 1}{2 + \sqrt[4]{3} - \sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{3\sqrt[4]{125} - \sqrt{5} - 4\sqrt[4]{5} + 7}{-2 + 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}$.

3. $\dfrac{\sqrt[4]{2} + \sqrt{2} - \sqrt[4]{8} - 1}{1 + \sqrt[4]{2}}$.

4. $\dfrac{-2\sqrt[4]{27} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt[4]{3} + 9}{2 - 2\sqrt[4]{3} + \sqrt{3}}$.

5. $\dfrac{5\sqrt[3]{4}-13\sqrt[3]{2}+5}{3\sqrt[3]{4}-1}$.

6. $\dfrac{7\sqrt[3]{9}-5\sqrt[3]{3}-19}{3\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{3}+1}$.

7. $\dfrac{9\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-6}{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}-2}$.

8. $\dfrac{-\sqrt[4]{8}+3\sqrt{2}-11\sqrt[4]{2}-20}{3+\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}}$.

9. $\dfrac{-5\sqrt[3]{9}-5\sqrt[3]{3}+16}{3\sqrt[3]{9}+2}$.

10. $\dfrac{10\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}+31}{4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+5}$.

11. $\dfrac{3\sqrt[3]{49}+5\sqrt[3]{7}-12}{\sqrt[3]{49}-2\sqrt[3]{7}+2}$.

12. $\dfrac{-3\sqrt[3]{25}+11\sqrt[3]{5}-21}{2\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+2}$.

13. $\dfrac{9\sqrt[3]{4}+10}{3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}$.

14. $\dfrac{-18\sqrt[3]{9}+8\sqrt[3]{3}+22}{\sqrt[3]{9}-5\sqrt[3]{3}+2}$.

15. $\dfrac{-34\sqrt[3]{4}+13\sqrt[3]{2}+74}{6\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+3}$.

16. $\dfrac{2\sqrt[3]{9}+18\sqrt[3]{3}-3}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}$.

17. $\dfrac{11\sqrt[3]{4}+11\sqrt[3]{2}-32}{-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+5}$.

18. $\dfrac{-12\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+17}{\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}+4}$.

19. $\dfrac{5\sqrt[3]{4}-13\sqrt[3]{2}+5}{2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-1}$.

20. $\dfrac{7\sqrt[3]{9}-5\sqrt[3]{3}-19}{\sqrt[3]{9}+2}$.

21. $\dfrac{9\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-6}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}-3}$.

22. $\dfrac{5\sqrt[3]{9}+5\sqrt[3]{3}-16}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+1}$.

23. $\dfrac{10\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{2}+31}{2\sqrt[3]{2}+3}$.

24. $\dfrac{3\sqrt[3]{49}+5\sqrt[3]{7}-12}{\sqrt[3]{49}+1}$.

25. $\dfrac{-3\sqrt[3]{25}+11\sqrt[3]{5}-21}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}-3}$.

26. $\dfrac{9\sqrt[3]{4}+10}{-\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+2}$.

27. $\dfrac{18\sqrt[3]{9}-8\sqrt[3]{3}-22}{\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}+1}$.

28. $\dfrac{34\sqrt[3]{4}-13\sqrt[3]{2}-74}{\sqrt[3]{4}-7\sqrt[3]{2}+4}$.

29. $\dfrac{2\sqrt[3]{9}+18\sqrt[3]{3}-3}{2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}}$.

30. $\dfrac{11\sqrt[3]{4}+11\sqrt[3]{2}-32}{3\sqrt[3]{3}-4}$.

Задание 79. Доказать, что $\boldsymbol{Q}(a)(b) = \boldsymbol{Q}(c)$.

1. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{17}$, $c = \sqrt{17}+\sqrt{2}$.
2. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{5}-\sqrt{2}$.
3. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{7}+\sqrt{2}$.
4. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{7}-2\sqrt{2}$.
5. $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{7}-\sqrt{15}$.
6. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{8}$, $c = \sqrt{5}+\sqrt{2}$.
7. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{7}-\sqrt{3}$.
8. $a = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{14}-\sqrt{12}$.
9. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{31}$, $c = \sqrt{31}+\sqrt{2}$.
10. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{17}$, $c = \sqrt{17}+\sqrt{5}$.

11. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{18}$, $c = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.
12. $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{7}+\sqrt{10}$.
13. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$, $c = \sqrt{5}+\sqrt{2}$.
14. $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.
15. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{15}$, $c = \sqrt{3}-\sqrt{5}$.
16. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{21}$, $c = \sqrt{7}-\sqrt{3}$.
17. $a = \sqrt{20}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.
18. $a = \sqrt{21}$, $b = \sqrt{12}$, $c = \sqrt{7}+\sqrt{3}$.
19. $a = \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{18}-\sqrt{11}$.
20. $a = \sqrt{20}$, $b = \sqrt{15}$, $c = \sqrt{12}-\sqrt{5}$.
21. $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{12}$, $c = \sqrt{8}-\sqrt{3}$.
22. $a = \sqrt{11}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{11}-\sqrt{18}$.
23. $a = \sqrt{12}$, $b = \sqrt{11}$, $c = \sqrt{11}-\sqrt{3}$.
24. $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{8}$, $c = \sqrt{12}+\sqrt{18}$.
25. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$, $c = \sqrt{8}-\sqrt{5}$.
26. $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{8}$, $c = \sqrt{12}+\sqrt{8}$.
27. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{15}$, $c = \sqrt{12}-\sqrt{20}$.
28. $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{21}$, $c = \sqrt{7}-\sqrt{27}$.
29. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{10}$, $c = \sqrt{10}-\sqrt{5}$.
30. $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{10}-\sqrt{2}$.

Задание 80. Найти многочлен $f(x)\in \boldsymbol{Q}[x]$, корнем которого является данное число. Найти степень этого числа над $\boldsymbol{Q}$.

1. $\sqrt[3]{2}-\sqrt{5}$.
2. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$.
3. $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$.
4. $-\sqrt[3]{2}+\sqrt{7}$.
5. $\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}$.
6. $-\sqrt[3]{3}+\sqrt{7}$.
7. $-\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.
8. $\sqrt[3]{2}-\sqrt{7}$.
9. $-\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}$.
10. $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$.
11. $-\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}$.
12. $-\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$.
13. $-\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$.
14. $-\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.
15. $\sqrt[3]{3}+\sqrt{7}$.
16. $\sqrt[3]{7}+\sqrt{2}$.
17. $-\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.
18. $-\sqrt[3]{3}-\sqrt{7}$.
19. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.
20. $-\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}$.
21. $\sqrt[3]{2}-\sqrt{7}$.
22. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$.
23. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{7}$.
24. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}$
25. $-\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$.
26. $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.
27. $\sqrt[3]{7}-\sqrt{2}$.
28. $-\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$.
29. $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$.
30. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

Задание 81. Найти многочлен $f(x)\in \boldsymbol{Q}[x]$, для которого данное число является корнем. Какова степень этого числа над $\boldsymbol{Q}$?

1. $\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+1$.
2. $\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1$.
3. $2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.
4. $2\sqrt[3]{4}+3$.
5. $\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+1$.
6. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+2$.
7. $\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+3$.
8. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-2$.
9. $\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+2$.
10. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+3$.
11. $2\sqrt[3]{4}+1$.
12. $3\sqrt[3]{4}+2$.
13. $3\sqrt[3]{4}-1$.
14. $\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1$.
15. $\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}-1$.
16. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$.
17. $\sqrt[3]{9}+1$.
18. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2$.

19. $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}-1$.
20. $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}-1$.
21. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+2$.
22. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-2$.
23. $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+1$.
24. $2\sqrt[3]{9}+1$.
25. $2\sqrt[3]{9}-1$.
26. $\sqrt[3]{9}+2$.
27. $\sqrt[3]{9}-2$.
28. $\sqrt[3]{9}+3$.
29. $\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+1$.
30. $\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}+1$

Задание 82. Число a является корнем многочлена $f(x)$, b выражается через a. Обосновать теоретически существование многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами, корнем которого является b. Найти этот многочлен.

1. $f(x) = x^3-x-2$, $b = a^2+a+1$.
2. $f(x) = x^3+x^2+x-2$, $b = a^2+a$.
3. $f(x) = x^3-x^2-1$, $b = 4a^2-1$.
4. $f(x) = x^3+x^2+x+2$, $b = -2a^2+3a-2$.
5. $f(x) = x^3-2x^2-x+1$, $b = 2a^2-3a$.
6. $f(x) = x^3+3x^2+2x-3$, $b = a^2-2a-2$.
7. $f(x) = x^3-3x^2-3x-2$, $b = -a^2+a-3$.
8. $f(x) = x^3-2x^2+1$, $b = 2a^2-a-1$.
9. $f(x) = x^3-x^2-2x+1$, $b = -2a^2+3$.
10. $f(x) = x^3+x^2+2$, $b = 3a^2+a$.
11. $f(x) = x^3-2x^2-x+3$, $b = -2a+3$.
12. $f(x) = x^3+3x^2+2$, $b = -a^2+3a-2$.
13. $f(x) = x^3-3x^2-2x+2$, $b = 2a^2-a-1$.
14. $f(x) = x^3+2x^2+3$, $b = -2a^2+1$.
15. $f(x) = x^3-x^2-3x-1$, $b = -3a^2+2a-1$.
16. $f(x) = x^3-2x^2+x-2$, $b = 3a^2-2a$.
17. $f(x) = x^3-2x-3$, $b = -a^2+2$.
18. $f(x) = x^3+3x+1$, $b = -2a^2-3a+1$.
19. $f(x) = x^3-x^2-x+2$, $b = 2a^2-2a-1$.
20. $f(x) = x^3+2x^2+x+2$, $b = a^2+2a-1$.
21. $f(x) = x^3-3x^2-2x+3$, $b = -3a^2-a+2$.
22. $f(x) = x^3+x-2$, $b = -a^2-2$.
23. $f(x) = x^3-x^2-x-1$, $b = 2a^2+3a-2$.
24. $f(x) = x^3-3x^2+2x-3$, $b = 2a^2-a$.

25. $f(x) = x^3-3x-1$, $b = -2a^2+1$.
26. $f(x) = x^3-x^2+2$, $b = -3a^2+2a+2$.
27. $f(x) = x^3-2x^2-x+2$, $b = 4a^2+a-2$.
28. $f(x) = x^3-2x^2+3x-3$, $b = -a^2-2a+1$.
29. $f(x) = x^3-3x-2$, $b = 2a^2+a+2$.
30. $f(x) = x^3-3x^2+3x+1$, $b = 2a^2-a$.

ЧАСТЬ 2

Система групповых заданий

Перечень тем заданий

1. Операции над множествами.
2. Свойства бинарных отношений.
3. Свойства композиции функций.
4. Образы и прообразы. Связь свойств образов и прообразов со свойствами функций.
5. Определение и свойства определителя.
6. Вычисление определителей порядка n.
7. Свойства групп.
8. Подгруппы.
9. Нормальные делители, фактор-группы, эпиморфизмы групп.
10. Фактор-группы группы $\boldsymbol{C}^*$.
11. Корни из единицы. Многочлены деления круга.
12. Свойства комплексных чисел.
13. Вычисление сумм (бином Ньютона, формула Муавра).
14. Свойства матриц и линейных преобразований.
15. Свойства ранга и дефекта линейных преобразований.
16. Свойства проекторов.
17. Свойства изометрических линейных операторов евклидова пространства.
18. Характеристика вырожденных и невырожденных матриц.
19. Определение кольца.
20. Свойства колец.
21. Кольцо эндоморфизмов абелевой группы.
22. Изоморфизмы и автоморфизмы колец и полей.
23. Фактор-кольца, эпиморфизмы колец.
24. Изоморфизмы колец и других алгебр.
25. Линейно упорядоченные кольца.
26. Текстовые задачи, связанные с алгоритмом Евклида.
27. Делимость в $\boldsymbol{Z}$.
28. НОД чисел. Взаимно простые числа.
29. Простые числа.
30. Числовые суммы и последовательности.
31. Евклидовы кольца.

32. Представление многочленной функции в виде суммы четной и нечетной многочленной функции.
33. Число корней многочлена. Интерполяционные многочлены.
34. Целочисленные многочлены: связь с делимостью чисел, разложение на неприводимые множители, число корней многочлена.
35. Критерий непроводимости Эйзенштейна. Разложение на простые множители над $\boldsymbol{Z}$ и над $\boldsymbol{Q}$.
36. Каталог неприводимых над $\boldsymbol{Z}_p$ многочленов.
37. Разложение на неприводимые над $\boldsymbol{R}$ множители.

Задание 1

1. а) В некотором множестве M выделена система подмножеств t, каждые два из которых имеют непустое пересечение. Пусть $A \subset M$. Доказать, что либо A, либо $\overline{A}$ имеет непустое пересечение с каждым подмножеством из семейства t.
   б) Решить систему уравнений $A \cap X = B$, $A \cup X = C$, где $B \subset A \subset C$.
2. а) Пусть t – система из 2^{n-1} подмножеств n–элементного множества A, обладающих свойством, что любые 3 подмножества из t имеют непустое пересечение. Доказать, что пересечение всех подмножеств из t не пусто, причем содержит в точности один элемент.
   б) Решить систему уравнений $A \cup X = B \cap X$, $A \cap X = C \cup X$.
3. а) В множестве, состоящем из n элементов, выбраны 2^{n-1} подмножеств, каждые 3 из которых имеют общий элемент. Доказать, что все эти подмножества имеют общий элемент.
   б) Решить систему уравнений $A \setminus X = B$, $X \setminus A = C$, где $B \subset A$, $A \cap C = \varnothing$.
4. а) Пусть $A = \{1, 2, ..., n\}$, $B = \{1, 2, ..., k\}$. Сколько существует подмножеств $M \subset A$ таких, что $M \cap B = \varnothing$?
   б) Решить систему уравнений $A \cap X = \varnothing$, $B \cap X = \varnothing$: выяснить условие разрешимости и указать решение.
5. а) Сколько решений имеет уравнение $\{1, 2, ..., n\} \cap X = \{1, 2, ..., k\} \cup X$?
   б) Решить систему уравнений $A \cup X = B \cap X$, $A \cap X = C \cup X$.
6. а) На каждой клетке шахматной доски записано одно из чисел 1, 2, ..., 64. За один вопрос можно, указав на любую совокупность клеток, узнать множество чисел, стоящих на этих клетках. Доказать, что за 6 вопросов можно узнать число в каждой клетке (указание: воспользоваться тем, что 3 круга Эйлера делят плоскость на 8 частей).
   б) Решить систему уравнений $A \cap X = B \setminus X$, $C \cap X = X \setminus A$.

Задание 2

1. а) Привести примеры транзитивного, не симметричного и не рефлексивного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Привести пример отношения, одновременно симметричного и антисимметричного. Верно ли, что это отношение также и рефлексивно?

2. а) Привести примеры рефлексивного, не симметричного и не транзитивного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Доказать, что всякое симметричное, транзитивное, всюду определенное отношение является отношением эквивалентности.
3. а) Привести примеры симметричного, не рефлексивного и не транзитивного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Доказать, что если S любое рефлексивное и транзитивное отношение, то $S \cap \tilde{S}$ — отношение эквивалентности.
4. а) Привести примеры рефлексивного, симметричного, но не транзитивного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Привести пример отношения, одновременно симметричного и антисимметричного. Доказать, что всякое такое отношение транзитивно.
5. а) Привести примеры транзитивного, симметричного, но не рефлексивного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Доказать, что всякое сюръективное, симметричное, транзитивное отношение является отношением эквивалентности.
6. а) Привести примеры рефлексивного, транзитивного, но не симметричного отношения на конечном и на бесконечном множествах.
   б) Верно ли, что всякое симметричное, транзитивное отношение является отношением эквивалентности?

Следующие 4 задания формулируются одинаково для всех бригад.

в) Составить таблицу, устанавливающую связь между свойствами отношений S и $\tilde{S}$ (имеются в виду свойства: рефлексивность, ..., сюръективность и производные от них: отношения эквивалентности, порядка и т. д.).

г) Аналогичным образом, составить таблицу, устанавливающую связь между свойствами отношений S, T и $S \cap T$; $S \cup T$; $S \setminus T$; $\bar{S}$.

д) Задав разбиение множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}, построить отношение эквивалентности на этом множестве. Построить граф этого отношения.

е) Построить второе отношение эквивалентности на множестве из задания Д, а затем составить отношение $S \cap T$ и $S \cup T$. Являются ли получившиеся отношения отношениями эквивалентности?

Задание 3

1. а) Доказать, что композиция двух инъекций является инъекцией.
   б) Доказать, что если $\psi \circ \varphi$ инъекция, то φ также инъекция.
   в) Привести пример, показывающий, что ψ не обязательно инъекция, если $\psi \circ \varphi$ инъекция.
2. а) Доказать, что композиция двух сюръекций является сюръекцией.
   б) Доказать, что если композиция $\psi \circ \varphi$ сюръекция, то ψ также сюръекция.

в) Привести пример, показывающий, что φ не обязательно сюръекция, если композиция $\psi \circ \varphi$ сюръекция.

3. а) Доказать, что если $\psi \circ \varphi = \chi \circ \varphi$ и φ сюръекция, то $\psi = \chi$.

   б) Привести пример, показывающий, что если j не сюръекция, то утверждение примера а) не выполняется.

   в) Пусть функция φ такова, что выполняется условие

$$(\forall\psi)(\forall\chi)(\psi \circ \varphi = \chi \circ \varphi \to \psi = \chi).$$

   Доказать, что φ сюръекция.

4. а) Доказать, что если $\psi \circ \varphi = \psi \circ \chi$ и ψ инъекция, то $\varphi = \chi$.

   б) Привести пример, показывающий, что если ψ не инъекция, то утверждение пункта а) не выполняется.

   в) Пусть функция ψ такова, что выполняется условие

$$(\forall\varphi)(\forall\chi)(\psi \circ \varphi = \psi \circ \chi \to \varphi = \chi).$$

   Доказать, что ψ инъекция.

5. а) Пусть $\psi \circ \varphi = \varepsilon_X$. Доказать, что φ инъекция, а ψ сюръекция.

   б) Привести пример, показывающий, что если $\psi \circ \varphi = \varepsilon_X$, то не обязательно ψ является инъекцией, а φ сюръекцией.

   в) Пусть функция φ: $X \to X$, где $|X| > 1$, такова, что выполняется условие $(\forall\psi)(\psi \circ \varphi = \psi)$. Доказать, что $j = \varepsilon_X$.

6. а) Доказать, что если φ биекция, то из равенства $\psi \circ \varphi = \chi \circ \varphi$ следует равенство $\psi = \chi$, а из равенства $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \chi$ — равенство $\psi = \chi$.

   б) Привести пример, показывающий, что если φ не биекция, то утверждение пункта а) не выполняется.

   в) Пусть функция ψ: $X \to X$, где $|X| > 1$, такова, что выполняется условие $(\forall\psi)(\varphi \circ \psi = \psi)$. Доказать, что $\psi = \varepsilon_X$.

Задание 4

1. Доказать, что f: $X \to Y$ — инъекция $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$ для любых $A \subset X$.
2. Доказать, что f: $X \to Y$ — сюръекция $\Leftrightarrow f(f^{-1}(A)) = A$ для любых $A \subset Y$.
3. Доказать: f: $X \to Y$ — инъекция $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для любых $A, B \subset Y$.
4. Доказать: f: $X \to Y$ —сюръекция $\Leftrightarrow f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing \to A \cap B = \varnothing$ для любых $A, B \subset Y$.
5. Доказать: f: $X \to Y$ – инъекция $\Leftrightarrow f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ для любых $A, B \subset X$.
6. Доказать: f: $X \to Y$ – инъекция $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing \to f(A) \cap f(B) = \varnothing)$ для любых $A, B \subset X$.

Задание 5

А. Вычислить значение определителя исходя из его определения.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & f & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & l \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 & 0 & i \\ j & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & g & h & 0 & 0 & i \\ 0 & j & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & i & j & k \\ 0 & 0 & l & 0 & 0 & m \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & i & j & 0 \\ 0 & k & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & d & e & 0 \\ f & g & h & 0 & 0 & i \\ j & k & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Б. Используя свойства определителя, указать его изменение

1. Как изменится определитель матрицы порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а его остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?
2. Как изменится определитель матрицы порядка n, если матрицу повернуть на 90° вокруг центра?
3. Как изменится определитель матрицы порядка n, если каждый ее элемент заменить симметричным ему относительно побочной диагонали?
4. Как изменится определитель матрицы порядка n, если из каждой строки матрицы, кроме первой, вычесть предыдущую строку, а из первой строки вычесть прежнюю последнюю строку?
5. Как изменится определитель матрицы порядка n, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец, а к первому прибавить прежний последний столбец?
6. Найти сумму всех определителей порядка $n \geq 2$, у которых в каждой строке и каждом столбце один элемент равен 1, а остальные элементы равны 0. Сколько таких определителей существует?

Задание 6. Вычислить определитель порядка n, приводя его к диагональному виду того или иного типа или разлагая на сумму определителей, или используя рекуррентные соотношения.

1. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & 3 & 2 & . & . & . & 2 \\ 2 & 2 & 3 & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 2 & 2 & . & . & . & 3 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & . & . & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & . & . & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & . & . & 3 & 2 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & n-1 & . & . & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & . & . & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & n+1-x \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & -n \\ 1 & 1 & . & . & . & -n & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & -n & . & . & . & 1 & 1 \\ -n & 1 & . & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 2 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & .. & . & . & a_n \\ a_1 & x_2 & . & . & . & a_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & . & x_n \end{vmatrix}$. д) $\begin{vmatrix} a & b & . & . & . & b & b \\ b & a & . & . & . & b & b \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b & b & . & . & . & a & b \\ b & b & . & . & . & b & a \end{vmatrix}$.

3. а) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ -x & x & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -x & x & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & x \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & . & . & . & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & . & . & . & a_2b_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_nb_1 & a_nb_2 & . & . & . & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} x & x & . & . & . & x & x & 1 \\ x & x & . & . & . & x & 2 & x \\ x & x & . & . & . & 3 & x & x \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ x & n & . & . & . & x & x & x \\ x & x & . & . & . & x & x & x \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} a_1^2-1 & a_2^2 & . & . & . & a_n^2 \\ a_1^2 & a_2^2-1 & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1^2 & a_2^2 & . & . & . & a_n^2-1 \end{vmatrix}$. д) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & n & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & n & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & n \end{vmatrix}$.

4. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & . & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & . & . & . & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & . & . & . & n-1 & n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ .1 & 2 & 3 & . & . & . & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & . & . & . & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & . & . & . & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & . & . & . & x_2y_n \\ . & . & . & . & . & . \\ x_ny_1 & x_ny_2 & . & . & . & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 2 & 7 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 0 & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. д) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_1 & x & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_1 & a_2 & x & . & . & . & a_n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & x \end{vmatrix}$.

5. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & . & . & . & . & 2n-1 \\ -1 & 0 & 5 & . & . & . & . & 2n-1 \\ -1 & -3 & 0 & . & . & . & . & 2n-1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & -3 & -5 & . & . & . & . & 0 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & a_1+1 \\ 1 & 1 & . & . & . & a_2+1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & a_{n-1}+1 & . & . & . & 1 & 1. \\ a_n+1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 3 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & . & . & . & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & . & . & . & a_2-b_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & . & . & . & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

д) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0. & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & 0 & 0 & .. & . & . & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & . & . & . & 0 & x \end{vmatrix}$.

6. а) $\begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_2 & . & . & . & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & . & . & . & a_2+x_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & . & . & . & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & x+a_n \\ a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1 & x+a_2 & . & . & . & a_n \\ x+a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$. г) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$. д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

Задание 7

А. Составить таблицу Кэли для группы G:

1. G — группа движений правильного треугольника.
2. G — группа подстановок трех элементов.
3. G — группа функций f_i: $\boldsymbol{R}^*\backslash\{1\}\to\boldsymbol{R}^*\backslash\{1\}$, i=1, ..., 6:

   $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $f_5(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $f_6(x)=\dfrac{1}{1-x}$,

   относительно композиции функций.
4. G — группа движений правильного тетраэдра с вершиной A, оставляющих неподвижной вершину A.
5. G — группа вращений правильного шестиугольника.
6. G — группа движений квадрата.

Б. Доказать, что элементы x и y имеют одинаковые порядки:

1. $x = abcd, y = bcda$.
2. $x = abcd, y = dabc$.
3. $x = abc, y = bca$.
4. $x = a, y = b^{-1}ab$.
5. $x = abc, y = cab$.
6. $x = ab, y = ba$.

В. Доказать, что следующее множество является подгруппой в соответствующей группе:

1. Множество нижних треугольных матриц в группе всех невырожденных матриц порядка n.
2. Множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \boldsymbol{R}$, в группе всех невырожденных матриц порядка 2.
3. $H = \{x: x=a+b\sqrt{3},\ a,b\in\boldsymbol{Q},\ a^2-2ab = 1\}$ в группе $\langle\boldsymbol{R}^*, \cdot\rangle$.
4. Множество верхних треугольных матриц в группе всех невырожденных матриц порядка n.
5. $H=\{\pi: \pi(1) = 1\}$ в группе подстановок n элементов S_n.

6. Множество квадратных матриц порядка n, в каждой строке и каждом столбце которых один элемент равен 1, а остальные элементы равны 0.

Г. Доказать неизоморфность групп:

1. $\langle \boldsymbol{R}^*, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}, + \rangle$.
2. $\langle \boldsymbol{R}^*_+, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}^*, \cdot \rangle$.
3. $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}, + \rangle$.
4. $\langle \boldsymbol{Q}^*, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}, + \rangle$.
5. $\langle \boldsymbol{R}^*, \cdot \rangle$ и $\langle \boldsymbol{Q}^*, \cdot \rangle$.
6. $\langle \boldsymbol{Z}, + \rangle$ и $\langle \boldsymbol{R}^*_+, \cdot \rangle$.

Д. Пользуясь теоремой Кэли, выяснить, задает ли таблица Кэли группу на данном множестве:

1.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5
a_3	a_3	a_5	a_1	a_6	a_2	a_4
a_4	a_4	a_6	a_2	a_5	a_1	a_3
a_5	a_5	a_3	a_6	a_1	a_4	a_2
a_6	a_6	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1

2.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_3	a_4	a_3	a_6	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3
a_5	a_5	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4
a_6	a_6	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5

3.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_1	a_5	a_6	a_4	a_3
a_3	a_3	a_6	a_1	a_5	a_2	a_4
a_4	a_4	a_3	a_2	a_1	a_6	a_5
a_5	a_5	a_4	a_6	a_3	a_1	a_2
a_6	a_6	a_5	a_4	a_2	a_3	a_1

4.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_5	a_1	a_2	a_4
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	a_2
a_5	a_5	a_4	a_2	a_3	a_1

5.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_1	a_5	a_3	a_4
a_3	a_3	a_4	a_1	a_5	a_2
a_4	a_4	a_5	a_2	a_1	a_3
a_5	a_5	a_3	a_4	a_2	a_1

6.

$\bullet$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_4	a_1	a_5	a_3
a_3	a_3	a_1	a_5	a_2	a_4
a_4	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2

Задание 8

1. Доказать, что объединение двух подгрупп группы является подгруппой этой же группы тогда и только тогда, когда одна из этих подгрупп содержится в другой подгруппе.
2. Доказать, что конечная подполугруппа любой группы является подгруппой этой группы. Остается ли верным это утверждение для бесконечных подполугрупп?
3. Существуют ли бесконечные группы, все элементы которых имеют конечный порядок?
4. Доказать, что если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C \subset A$, либо $C \subset B$.
5. Доказать, что если коммутативная группа G содержит элементы бесконечного порядка и все они содержатся в подгруппе H, то $H = G$.
6. Представить группу $\boldsymbol{Q}$ в виде возрастающей цепочки циклических подгрупп.

Задание 9

1. а) Пусть φ: $G \to G_1$ — эпиморфизм групп, $H < G$. Доказать, что $\varphi(H) < G_1$.
   б) Может ли группа иметь две изоморфных нормальных подгруппы, фактор-группы по которым не изоморфны?
2. а) Пусть φ: $G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H_1 < G_1$. Доказать, что $\varphi^{-1}(H_1) < G$.
   б) Пусть $Z_G = \{x: (\forall a \in G)(ax = xa)\}$. Доказать, что $Z_G < G$. Доказать, что если G некоммутативная группа, то G/Z_G не циклическая группа.
3. а) Пусть φ: $G \to G_1$ — гомоморфизм групп, $H < G$. Доказать, что $\varphi(H) < G_1$.
   б) Пусть φ: $G \to G_1$ — эпиморфизм групп. Доказать, что G_1 коммутативна тогда и только тогда, когда $(\forall a)(\forall b)(a^{-1}b^{-1}ab \in Ker\ \varphi)$.
4. а) Пусть φ: $G \to G_1$ — эпиморфизм групп, $H_1 < G_1$. Доказать, что $\varphi^{-1}(H_1) < G$.
   б) Может ли группа иметь не изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым изоморфны?
5. а) Пусть $H < G$, $T < G$. Доказать, что $HT < G$ и $H < HT$.
   б) Могут ли две не изоморфные группы иметь изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым изоморфны?
6. а) Пусть $H < G$, $T < G$, Доказать, что $H \cap T < T$.
   б) Доказать, что если $H_1 < G_1$, $H_2 < G_2$, то $H_1 \times H_2 < G_1 \times G_2$.

Задание 10

А. Доказать, что H подгруппа в группе $\langle \boldsymbol{C}^*, \cdot \rangle$.
Б. Описать смежные классы группы $\boldsymbol{C}^*$ по подгруппе H.
В. Доказать, что фактор-группа $\boldsymbol{C}^*/H$ изоморфна группе L.
Г. Описать функцию φ, осуществляющую этот изоморфизм.
Д. Придумать гомоморфизм f: $\boldsymbol{C}^* \to L$, ядро которого совпадает с H.

1. $H = \boldsymbol{R}^*_+$, $L = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$.

2. $H = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$, $L = \boldsymbol{R}^*_+$.
3. $H = \boldsymbol{R}^*$, $L = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$.
4. H – множество ненулевых комплексных чисел, изображаемых точками осей координат, $L = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$.
5. H – множество ненулевых комплексных чисел, изображаемых точками лучей $\varphi = \frac{2\pi}{3}k$, $k = 0, 1, 2$, $L = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$.
6. H – множество ненулевых комплексных чисел, изображаемых точками лучей $\varphi = \frac{\pi}{3}k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $L = \{z \in \boldsymbol{C}^*: |z| = 1\}$.

Задание 11

А. Выписать все элементы множества $\sqrt[n]{1}$.
Б. Разбить множество $\sqrt[n]{1}$ на подмножества, состоящие из элементов, имеющих один и тот же порядок.
В. Составить многочлен деления круга $\Phi_n(x)$.
Г. Доказать, что $\Phi_n(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ при любых натуральных n

1. $n = 9$. **2.** $n = 10$. **3.** $n = 12$. **4.** $n = 14$. **5.** $n = 15$. **6.** $n = 18$.

Задание 12

1. а) Пусть точки, изображающие числа 0, z_1, z_2, не лежат на одной прямой. Изобразить геометрически множество чисел $z = \lambda z_1 + (2\lambda+5)z_2$, где $\lambda \in \boldsymbol{R}$.
   б) Решить уравнение $(x+1)^n - (x-1)^n = 0$.
2. а) Изобразить геометрически множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $\frac{z - z_1}{z - z_2} = \cos j + i \sin j$, где z_1 и z_2 — фиксированные комплексные числа, а $\varphi \in \boldsymbol{R}$.
   б) Решить уравнение $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$.
3. а) Изобразить геометрически множество комплексных чисел $z = \frac{1+it}{1-it}$, где $t \in \boldsymbol{R}$.
   б) Решить уравнение $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$.
4. а) Изобразить геометрически множество z комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$, где $z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^*_+$ — фиксированные числа.
   б) Найти все числа, комплексно сопряженные своей n- й степени.
5. а) Доказать, что точки плоскости, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \boldsymbol{R}$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

б) Доказать, что $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда z может быть представлен в виде $z = \frac{c}{\bar{c}}$ для некоторого $c \in \boldsymbol{C}$ (здесь $\bar{c}$ — число, комплексно сопряженное c).

6. а) Доказать, что точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \boldsymbol{R}$.

б) Доказать, что все корни уравнения $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+ai}{1-ai}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $a \in \boldsymbol{R}$, действительны и различны.

Задание 13. Доказать:

1. а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$, если n четно.

б) $C_n^1 + 2C_n^2 2 + 3C_n^3 2^2 + \ldots + nC_n^n 2^{n-1} = n \cdot 3^{n-1}$.

в) $\sin j + \sin 2j + \ldots + \sin nj = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}j \cdot \sin\frac{nj}{2}}{\sin\frac{j}{2}}$.

2. а) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$, если n нечетно.

б) $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$.

в) $1 + \cos j + \cos 2j + \ldots + \cos nj = \sin^2 \frac{(n+1)j}{2}$.

3. а) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \ldots + 2^n C_n^n = 3^n$.

б) $2C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 2^2 + \frac{1}{3}C_n^2 2^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n 2^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

в) $\cos j + C_n^1 \cos 2j + \ldots + C_n^n \cos(n+1)j = 2^n \cos\frac{nj}{2} \cos\frac{n+2}{2}j$.

4. а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

б) $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \ldots + 3^n C_n^n = 4^n$.

в) $\sin j + C_n^1 \sin 2j + \ldots + C_n^n \sin(n+1)j = 2^n \cos^n \frac{j}{2} \sin\frac{n+2}{2}j$.

5. а) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$.

б) $3^n - C_n^{n-1}3^{n-1} + C_n^{n-2}3^{n-2} - \ldots - C_n^1 3 + C_n^0 = 2^n$, если n четно.

в) $\cos^2 j + \cos^2 2j + \ldots + \cos^2 nj = \frac{n}{2} + \dfrac{\cos(n+1)j \cdot \sin nj}{2\sin j}$.

6. а) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

б) $\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$.

в) $\sin^2 j + \sin^2 2j + ... + \sin^2 nj = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)j \cdot \sin nj}{2\sin j}$.

Задание 14

1. Доказать, что скалярные матрицы и только они перестановочны со всеми квадратными матрицами порядка n.
2. Доказать, что любая квадратная матрица либо обратима, либо является левым и правым делителем нуля.
3. Доказать, что диагональные матрицы и только они перестановочны со всеми диагональными матрицами.
4. Доказать, что произведение двух симметрических или кососимметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.
5. Доказать, что скалярные матрицы и только они перестановочны со всеми невырожденными матрицами порядка n.
6. Доказать, что произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

Задание 15

1. Доказать, что $r(fg) \le \min\{r(f), r(g)\}$.
2. Доказать, что $r(f+g) \le r(g)+r(g)$.
3. Доказать, что $d(fg) \le d(f)+d(g)$.
4. Доказать, что $\max\{d(f), d(g)\} \le d(fg)$.
5. Доказать, что $fg = 0 \Rightarrow r(f)+r(g) \le \dim V$.
6. Доказать, что $r(f) = 1 \Rightarrow (\exists! a)(f^2 = \alpha f)$.

Задание 16. Пусть $V = U \oplus W$. Если $x \in V$, $x = a + b$, где $a \in U$, $b \in W$, то отображение f: $V \to V$, определяемое правилом $f(x) = a$, называется проектированием пространства V на подпространство U параллельно подпространству W или, короче, проектором.

А. Доказать, что f линейный оператор.

Б. Пусть f линейный оператор. Доказать, что f проектор, тогда и только тогда, когда $f^2 = f$.

В. 1. f проектор $\Leftrightarrow \varepsilon_V - f$ проектор. При этом $Im\, f = Ker(\varepsilon_V - f)$.

2. f проектор $\Leftrightarrow Im\, f = \{x: f(x) = x\}$.

3. Если f и g проекторы, то $Im\, f = Im\, g \Leftrightarrow fg = g \wedge gf = f$.

4. Если f и g проекторы, то $Ker\, f = Ker\, g \Leftrightarrow fg = f \wedge gf = g$.

5. Если f и g проекторы, то $f + g$ проектор $\Leftrightarrow fg = gf = 0$.

6. Если f и g проекторы, то $f - g$ проектор $\Leftrightarrow fg = gf = 0$.

Задание 17

Определение 1. Пусть V n-мерное евклидово пространство. Линейный оператор φ: $V \to V$ называется изометрией, если φ сохраняет длину вектора: $|\varphi(x)| = |x|$.

Определение 2. Квадратная матрица A называется ортогональной, если выполняется равенство ${}^{t}AA = E$.

Доказать:

1. Строки матрицы образуют ортонормированное множество $\Leftrightarrow$ столбцы матрицы образуют ортонормированное множество $\Leftrightarrow$ матрица ортогональна.
2. Пусть V евклидово пространство, $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ортонормированный базис V, φ евклидов изоморфизм. Доказать, что матрица $M_E(\varphi)$ ортогональная.
3. Пусть $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ортонормированный базис евклидова пространства V, φ линейный оператор V, матрица которого ортогональная. Доказать, что φ евклидов изоморфизм.
4. Всякий евклидов изоморфизм является изометрией.
5. Всякая изометрия является евклидовым изоморфизмом.
6. Если φ: $V \to V$ отображение евклидова пространства, сохраняющее длину вектора, то: 1) φ линейный оператор; 2) φ евклидов изоморфизм.

Задание 18. Пусть A квадратная матрица порядка n. Доказать равносильность следующих утверждений о матрице.

1. а) A невырожденная матрица; система линейных уравнений $AX = b$ совместна при любых b; число 0 не является собственным значением матрицы A.
   б) A вырожденная матрица; существует матрица B такая, что $r(AB) \neq r(B)$.
2. а) A^{-1} существует; если система линейных уравнений $AX = b$ совместна, то она имеет единственное решение; столбцы матрицы A линейно независимы.
   б) $\det A = 0$; существует вектор b такой, что система линейных уравнений $AX = b$ неразрешима.
3. а) Если $A = M(\varphi)$, то $\dim Im\varphi = n$; система линейных уравнений $AX = b$ имеет единственное решение при любых b.
   б) $r(A) < n$; число 0 является собственным значением матрицы A; A является левым и правым делителем нуля.
4. а) Строки матрицы A линейно независимы; система линейных уравнений $AX = \theta$ имеет единственное решение.
   б) Столбцы матрицы A линейно зависимы; если $A = M(\varphi)$, то $Ker\varphi \neq \theta$; существует вектор b такой, что система линейных уравнений $AX = b$ имеет более одного решения.
5. а) $\det A \neq 0$; существует линейно независимая система n векторов $b_1, b_2, ..., b_n$ такая, что каждая система линейных уравнений $AX = b_k$, $k = 1, 2,..., n$, разрешима.
   б) A^{-1} не существует; если $A = M(\varphi)$, то φ не является сюръекцией; система линейных уравнений $AX = \theta$ имеет более одного решения.

6. а) $r(A) = n$; если $A = M(\varphi)$, то $Ker\varphi = \theta$; существует вектор b такой, что система линейных уравнений $AX = b$ имеет единственное решение.
   б) Строки матрицы A линейно зависимы; существует ненулевая матрица B такая, что $AB = 0$.

Задание 19

А. Является ли кольцом алгебра $\langle A; +, \bullet\rangle$?

1. $A = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$; сложение покоординатное, $(a, b)\bullet(c, d) = (ac, ad+b)$.
2. $A = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$; сложение покоординатное, $(a, b)\bullet(c, d) = (ac, bc+d)$.
3. $A = \{f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \mid f(x) = ax+b\}$; сложение поточечное, $(f\bullet g)(x) = f(g(x))$.
4. $A = \{f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \mid f(x) = ax+b\}$; сложение поточечное, $(f\bullet g)(x) = g(f(x))$.
5. $A = \{f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\}$; сложение поточечное, $(f\bullet g)(x) = g(f(x))$.
6. $A = \{f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\}$; сложение поточечное, $(f\bullet g)(x) = f(g(x))$.

Ответы на следующие два вопроса дать после сравнения алгебр.

Б. Являются ли некоторые из данных алгебр подалгебрами других данных алгебр?
В. Имеются ли среди данных алгебр изоморфные? антиизоморфные?

Задание 20

1. а) Доказать, что всякое конечное кольцо (не обязательно коммутативное), не имеющее делителей нуля, имеет единицу и все его ненулевые элементы обратимы. Верно ли это утверждение для бесконечного кольца?
   б) Доказать, что любой элемент кольца не может быть одновременно делителем нуля и делителем единицы.
2. а) Доказать, что в конечном кольце с единицей (не обязательно коммутативном) всякий элемент, имеющий односторонний обратный, обратим. Верно ли утверждение для бесконечного кольца?
   б) Доказать, что коммутативное кольцо обладает единицей тогда и только тогда, когда в кольце существует элемент, на который делятся все элементы кольца.
3. а) В произвольном конечном (не обязательно коммутативном) кольце с единицей всякий левый делитель нуля является и правым делителем нуля. Верно ли утверждение для бесконечного кольца?
   б) Доказать, что в коммутативном кольце элемент a является делителем единицы тогда и только тогда, когда уравнение $ax = b$ разрешимо при любых b.
4. а) Доказать, что в кольце с единицей элементы xy и yx обратимы тогда и только тогда, когда обратимы элементы x и y.
   б) Доказать, что элемент a коммутативного кольца является делителем нуля тогда и только тогда, когда существует такой элемент b, что уравнение $ax = b$ имеет более одного решения.
5. а) Доказать, что в кольце с единицей и без делителей нуля элемент xy обратим тогда и только тогда, когда одновременно обратимы x и y.

б) Доказать, что кольцо является кольцом с сокращением тогда и только тогда, когда кольцо не имеет делителей нуля.

6. а) Доказать, что в конечном кольце с единицей элемент xy обратим тогда и только тогда, когда одновременно обратимы элементы x и y.

   б) Доказать, что в конечном коммутативном кольце любой ненулевой элемент является либо делителем нуля, либо делителем единицы.

Задание 21. Гомоморфизм φ: $A \to A$ называется эндоморфизмом алгебры A. Биективный эндоморфизм называется автоморфизмом алгебры. Пусть $\langle G; +\rangle$ произвольная абелева группа.

А. Доказать, что множество $End\ G$ всех эндоморфизмов абелевой группы образует кольцо относительно операций $+$ и $\circ$, где

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Б. Пусть $a \in \boldsymbol{Z}_m$. Доказать, что отображение λ_a: $x \to ax$ является эндоморфизмом группы $\langle \boldsymbol{Z}_m; +\rangle$.

В. Доказать, что любой эндоморфизм данной группы $\boldsymbol{Z}_m$ имеет вид λ_a.

Г. Вывести отсюда, что кольцо $End\ \boldsymbol{Z}_m$ изоморфно кольцу классов вычетов $\langle \boldsymbol{Z}_m; +, \cdot\rangle$.

Д. Сколько элементов этого кольца является автоморфизмами?

1. $\boldsymbol{Z}_9$. **2.** $\boldsymbol{Z}_{10}$. **3.** $\boldsymbol{Z}_{15}$. **4.** $\boldsymbol{Z}_{12}$. **5.** $\boldsymbol{Z}_8$. **6.** $\boldsymbol{Z}_{14}$.

Задание 22

А. Найти все автоморфизмы поля.

Б. Доказать, что кольца не изоморфны.

1. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$.
   б) $2\boldsymbol{Z}$ и $3\boldsymbol{Z}$.
2. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$.
   б) $3\boldsymbol{Z}$ и $5\boldsymbol{Z}$.
3. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$.
   б) $2\boldsymbol{Z}$ и $5\boldsymbol{Z}$.
4. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-5})$.
   б) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ и $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$.
5. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{7})$.
   б) $2\boldsymbol{Z}$ и $6\boldsymbol{Z}$.
6. а) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
   б) $3\boldsymbol{Z}$ и $7\boldsymbol{Z}$.

Задание 23

1. Доказать, что элемент a является простым элементом целостного кольца A тогда и только тогда, когда фактор-кольцо $A/(a)$ является полем.
2. Доказать, что любой гомоморфизм поля является либо изоморфизмом, либо нулевым отображением.
3. Доказать, что кольцо целых чисел нельзя эпиморфно отобразить на любое свое ненулевое подкольцо.
4. Можно ли некоторое кольцо, не являющееся полем, эпиморфно отобразить на поле?
5. Можно ли кольцо без единицы эпиморфно отобразить на кольце с единицей? Кольцо с единицей на кольцо без единицы?
6. Найти все автоморфизмы кольца $\boldsymbol{Z}[\sqrt[3]{7}]$.

Задание 24

А. Пусть $\langle A; +, \cdot\rangle$ — кольцо (поле), $\varphi : A \to B$ биекция A на произвольное множество B. Определим на B правила $\oplus$ и $\otimes$ следующим образом:

$$b_1 \oplus b_2 = \varphi(\varphi^{-1}(b_1) + \varphi^{-1}(b_2)),$$
$$b_1 \otimes b_2 = \varphi(\varphi^{-1}(b_1) \cdot \varphi^{-1}(b_2)).$$

Доказать:

а) правила $\oplus$ и $\otimes$ задают операции на B;

б) $\langle B; \oplus, \otimes\rangle$ является кольцом (полем);

в) отображение φ (или φ^{-1}) есть изоморфизм колец.

Б. Пользуясь доказанным, построить на $\boldsymbol{R}$ поле с необычными операциями сложения и умножения.

Задание 25

1. $A = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ — декартово произведение колец. Доказать, что алфавитный порядок не делает кольцо линейно упорядоченным кольцом.
2. $A = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ — декартово произведение колец. Определим отношение $\mathbf{p}$ на A следующим образом: $(a; b)\ \mathbf{p}\ (c; d) \Leftrightarrow a \le c \wedge b \le d$. Доказать, что это отношение не делает кольцо A линейно упорядоченным кольцом.
3. Доказать, что всякое линейно упорядоченное кольцо не содержит делителей нуля.
4. Доказать, что всякое линейно упорядоченное кольцо бесконечное.
5. Доказать, что всякое линейно упорядоченное кольцо имеет характеристику 0.
6. Доказать, что всякое конечное кольцо невозможно превратить в линейно упорядоченное кольцо.

Задание 26

1. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку; прочитав карточку с парой $(a; b)$, первый автомат выдает карточку $(a–b; b)$, второй — карточку $(a+b; b)$, третий — карточку $(b; a)$. Пусть первоначально имеется карточка с парой (19; 91). Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из нее карточку (2; 5)? (18; 81)? Найти критерий, позволяющий определить, можно ли преобразовать с помощью этих автоматов пару $(a; b)$ в пару $(c; d)$.
2. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим карандашом от ее начала через каждые 36 см. Другой мастер делает пометки красным карандашом от начала через каждые 25 см. Может ли синяя пометка оказаться на расстоянии 1 см от какой-нибудь красной пометки?
3. Про некоторую фигуру на плоскости известно, при повороте вокруг точки 0 на 48° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг точки 0 на угол 90°? 72°? Найти критерий, позволяющий определить, переходит ли фигура в себя при повороте на данный угол.
4. а) От прямоугольника 324 см × 141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше 141 см. От полученного прямоугольника отрезают квадраты, стороны которых равны по длине меньшей стороне прямоугольника

до тех пор, пока это возможно и так далее. Какова длина стороны последнего отрезанного квадрата?

б) Найти какие-нибудь два числа a и b, чтобы при таком разрезании прямоугольника $a \times b$ получились квадраты ровно 6 размеров.

5. а) По окружности радиуса 40 см катится колесо радиуса 18 см. В колесо вбит гвоздь, который, ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности?

   б) Сколько раз прокатится колесо по окружности, прежде чем гвоздь попадет в уже отмеченную точку?

Задание 27

1. а) Доказать, что если стороны прямоугольника a и b и его диагональ c – числа целые, то площадь прямоугольника кратна 12, а произведение abc кратно 60.

   б) Существуют ли целые числа a, b, удовлетворяющие уравнению $a^2+1998 = b^2$?

2. а) Даны n числе $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых равно 1 или –1. Известно, что $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1 = 0$. Доказать, что n делится на 4.

   б) Число $n \in \boldsymbol{N}$ таково, что $2n+1$ и $3n+1$ являются точными квадратами. Доказать, что n делится на 8.

3. а) Число 2001 умножается на числа 1, 2,..., 999. Доказать, что если выписать 3 последние цифры у каждого из этих произведений, то все выписанные 999 трехзначных ‘чисел’ (некоторые из них начинаются с 0) будут различны.

   б) Решить в $\boldsymbol{Z}$ уравнение $x^3-2y^3-4z^3 = 0$.

4. а) Доказать, что при любых $n \in \boldsymbol{Z}$ число n^2+3n+5 не делится на 121.

   б) Может ли квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

5. а) Сколько существует пар натуральных чисел $x, y \in [1, 1000]$ таких, что $x^2 + y^2 \vdots 49$?

   б) Доказать, что число 250 нельзя представить в виде $n^2 - m^2$, где $n, m \in \boldsymbol{Z}$.

6. а) Числа 1, 2, ..., n переставлены в некотором порядке: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказать, что если n четно, то $(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot \ldots \cdot(a_n-n)$ четно.

   б) Доказать, что при $n > 1$ числа 2^n-1 не являются полными квадратами.

Задание 28

А. Будет ли сократима дробь?

Если сократима, то на какое число и при каких значениях n?

1. $\dfrac{111n+5}{64n+3}$.
2. $\dfrac{5n+6}{8n+7}$.
3. $\dfrac{12n+1}{14n+3}$.
4. $\dfrac{21n+4}{14n+3}$.
5. $\dfrac{9n+8}{7n+4}$.
6. $\dfrac{2n+1}{9n+4}$.

Б. $(a, b) = 1$. Найти НОД, используя определение

1. $(2a+b, 5a+3b)$.
2. $(7a+5b, 3a+2b)$.
3. $(5a+3b, 3a+2b)$.
4. $(13a+2b, 20a+3b)$.
5. $(7a+2b, 11a+2b)$.
6. $(5a+3b, 11a+8b)$.

В. Доказать иррациональность числа

1. 1) $\sqrt{10}$.
2. 2) $\sqrt{21}$.
3. 3) $\sqrt{12}$.
4. 4) $\sqrt[3]{5}$.
5. 5) $\sqrt[4]{27}$.
6. 6) $\sqrt[3]{7}$.

Г. $(a, b)=1$. Найти НОД, используя каноническое разложение.

1. $(a+b, (a-b)^2)$.
2. $(a+b, a^2+b^2)$.
3. $(a+b, a^2-ab+b^2)$.
4. $(a-b, a^2+ab+b^2)$.
5. $(a-b, a^2-ab+b^2)$.
6. $(a+b, a^2+ab+b^2)$.

Д. 1) Доказать, что если a и b взаимно простые числа, то $(ac, b) = (b, c)$.

2) Доказать: $(2^p-1, 2^q-1) \Leftrightarrow (p, q) = 1$.

3) Доказать, что при любом натуральном n число $(1+\sqrt{2})^n$ может быть представлено в виде $a+ b\sqrt{2}$, где a и b взаимно простые целые числа.

4) Доказать: $\left(\frac{a^n-1}{a-1}, a-1\right) = (a-1, n)$.

5) $m = [a, b]$. Найти $(a + b, m)$.

6) $m = [a, b]$. Найти (ab, m).

Задание 29

1. а) Доказать, что остаток от деления простого числа на 30 есть 1 или является простым числом.

   б) p и q простые числа, q^3-1 делится на p, $p-1$ делится на q. Доказать, что $p = 1+q+q^2$.

2. а) Найти все натуральные числа n, для которых все числа $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+15$ являются простыми.

   б) При каких значениях простых чисел p и q число $(p+1)^q$ являются полным квадратом?

3. а) Найти все числа p, для которых каждое из чисел p, $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+12$, $p+14$ является простым.

   б) Доказать, что если p и q простые числа и $q = p+2$, то $p^q + q^p$ делится на $p+q$.

4. а) Какое наибольшее количество простых чисел может встретиться среди 17 последовательных чисел, больших 3.

   б) Найти все простые числа p, такие, что $2^p+1 \vdots p$.

5. а) Найти 3 последовательных простых числа, сумма квадратов которых также является простым числом.

   б) Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

6. а) Найти все простые числа p, такие, что 1) p^2+13 — простое число; 2) p^2+14 — простое число.

б) Число 2^p-1 простое. Доказать, что p также простое число.

Задание 30

1. а) Найти все арифметические прогрессии с разностью 10, состоящие более чем из двух простых чисел.

б) Доказать, что уравнение $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$ не разрешимо в $\boldsymbol{N}$.

2. а) Найти все арифметические прогрессии с разностью 100, содержащие более чем 2 простых чисел.

б) Доказать, что квадрат числа вида $3n+2$, где $n \neq 0$, нельзя представить в виде суммы квадрата натурального числа и простого числа.

3. а) Простые числа $a_1, a_2, ..., a_p$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию, $a_p > p$. Доказать, что если p простое число, то разность прогрессии делится на p.

б) Доказать, что нечетные числа вида $6n+1$, $n \geq 1$, нельзя представить в виде разности двух простых чисел.

4. а) Доказать, что если числа a, $a+d$, $a+2d,..., a+(n-1)d$ целые и взаимно простые числа с n, то d и n не взаимно простые.

б) Доказать, что всякое натуральное число, большее 6, является суммой двух взаимно простых чисел, больших 1.

5. а) Найти все целые числа $k \geq 0$, для которых последовательность $k+1$, $k+2$, ..., $k+10$ содержит наибольшее количество простых чисел.

б) Доказать, что сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, где $n > 1$, не может быть целым числом.

6. а) Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются натуральными числами, образующими арифметическую прогрессию.

б) Найти все простые числа, которые являются одновременно суммой и разностью простых чисел.

Задание 31

А. Доказать, что данное числовое кольцо евклидово.

Б. Найти НОД элементов a и b.

1. а) $\{x+y\sqrt{2} : x, y \in \boldsymbol{Z}\}$;

б) $a=14-3i\sqrt{2}$, $b = 8+5i\sqrt{2}$; $a = 9+i\sqrt{2}$, $b = 7-6i\sqrt{2}$.

2. а) $\{x+y\sqrt{2} : x, y \in \boldsymbol{Z}\}$;

б) $a = 8-3\sqrt{2}$, $b = 53-39\sqrt{2}$; $a = 118-71\sqrt{2}$, $b = 23+\sqrt{2}$.

3. а) $\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}i\sqrt{3} : x, y \in \boldsymbol{Z},\ x-y \equiv 2\}$;

б) $a = 5+i\sqrt{3}$, $b = 21+6i\sqrt{3}$; $a = 13-7i\sqrt{3}$, $b = 5+7i\sqrt{3}$.

4. а) $\{x+y\sqrt{3} : x, y\in \boldsymbol{Z}\}$;

   б) $a = 24+7\sqrt{3}$, $b = 21+2\sqrt{3}$; $a = 19+9\sqrt{3}$, $b = -31-19\sqrt{3}$.

5. а) $\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}i\sqrt{5} : x, y\in \boldsymbol{Z}, x-y \vdots 2\}$;

   б) $a = 7+12\sqrt{5}$, $b = 4-5\sqrt{5}$; $a = 8-7\sqrt{5}$, $b = -11+13\sqrt{5}$.

6. а) $\{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}i\sqrt{7} : x, y\in \boldsymbol{Z},\ x-y \vdots 2\}$;

   б) $a = 13+5i\sqrt{7}$, $b = 8-3i\sqrt{7}$; $a = 29-8i\sqrt{7}$, $b = 15+2i\sqrt{7}$.

Задание 32

1. Найти сумму коэффициентов многочлена
   $(7x^3-13x^2+3x+4)^{1999}(x^3-8x^2+6x+1999)+(2x^3+18x-21)^{2000}$
   после приведение его к стандартному виду.
2. Найти сумму коэффициентов при нечетных степенях x многочлена
   $$(x^4-x+1)^{1999}+(x^5+x-1)^{1999}$$
   после приведения его к стандартному виду.
3. Доказать, что в произведении многочленов
   $(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100})$
   после раскрытия скобок и приведения подобных членов отсутствуют члены, содержащие нечетные степени переменной x.
4. Найти сумму коэффициентов многочлена
   $1+(x^2-6x+5)(x^5+3x^4-2x^3+x^2-x+7)^3+(x^2-3x+1)^2(x^3+5x+7)$
   после приведения его к стандартному виду.
5. Найти сумму коэффициентов при четных степенях x многочлена
   $(x^4+x^3+x^2+x+1)^4-(2x^3+3x^2-2)^5$
   после приведения его к стандартному виду.
6. Доказать, что в многочлене
   $(1+x+x^2+x^3+x^4)(x^2+3x+2)^{2000}+(-1+x-x^2+x^3-x^4)(x^2-3x+2)^{2000}$
   после раскрытия скобок и приведения подобных членов отсутствуют члены, содержащие нечетные степени переменной x.

Задание 33

1. а) Пусть $g(x)\in \boldsymbol{R}[x]$. Доказать, что если $\tilde{g}$ ограниченная функция, то $\deg g = 0$.

   б) Доказать, что если $\deg g < n$ и $\tilde{g}$ принимает целые значения при n последовательных целых значениях переменной, то $\tilde{g}$ принимает целые значения при всех целых значениях переменной. Верно ли, что $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$?

2. а) $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, $m\in \boldsymbol{Z}$. Доказать: m корень $g(x) \Leftrightarrow \tilde{g}(a) \vdots a-m$ при любых целых значениях a.

   б) Найти корни многочлена $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

3. а) Доказать, что функция sin не является многочленной функцией.

   б) Доказать: $(\forall n\in \boldsymbol{Z})(\tilde{g}(n)\in \boldsymbol{Z}) \Leftrightarrow 2a,\ a+d,\ c\in \boldsymbol{Z}$, если $g(x) = ax^2+dx+c$.

4. а) Верно ли, что в $\boldsymbol{Z}_6[x]$ любой многочлен имеет корней не больше, чем его степень?

   б) Построить многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условию $\tilde{g}(i) = i^{-1}$ для $i=1, 2, \ldots, n$: а) над $\boldsymbol{Q}$; б) над $\boldsymbol{Z}_p$, где p простое число.

5. а) Коэффициенты a, b, c многочлена $g(x) = x^3+ax^2+bx+c \in \boldsymbol{R}[x]$ по модулю не превосходят 1999. Может ли этот многочлен иметь корень, больший чем 2000?

   б) Пусть $(\forall a\in \boldsymbol{Q})(\ \tilde{g}(a) \in \boldsymbol{Q})$. Доказать, что $g(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$.

6. а) Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)\in \boldsymbol{R}[x]$, $\deg g_1 = 3$, $\deg g_2 = 2$. Доказать, что графики функций $y = \tilde{g}_1(x)$ и $y = \tilde{g}_2(x)$ пересекаются.

   б) Пусть $g(x) = ax^3+bx^2+cx+d$.

   Доказать: $(\forall n\in \boldsymbol{Z})(\ \tilde{g}(n)\in \boldsymbol{Z}) \Leftrightarrow 6a,\ 2b,\ a+b+c,\ d\in \boldsymbol{Z}$.

Задание 34

1. а) Существует ли $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, такой, что $\tilde{g}(1) = 2$, $\tilde{g}(2) = 3$, $\tilde{g}(3) = 5$?

   б) $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$ и множество значений $\tilde{g}$ содержит бесконечно много простых чисел. Доказать, что $g(x)$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

2. а) Существует ли $g(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$, такой, что $\tilde{g}(1) = 19$, $\tilde{g}(19) = 99$?

   б) Привести пример приводимого над $\boldsymbol{Q}$ многочлена $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, многочленная функция которого при k различных натуральных значениях переменной дает k различных простых значений.

3. а) $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$. В трех целых точках $\tilde{g}$ принимает значение, равное 2. Доказать, что ни в какой целой точке $\tilde{g}$ не принимает значение, равное 3.

   б) Доказать, что если $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, $\deg g = n \geq 1$ и $\tilde{g}$ принимает значения ± 1 более чем при n целых значениях переменной, то $g(x)$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

4. а) $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, a, b, c различные целые числа. Доказать, что невозможны одновременно равенства $\tilde{g}(a) = b$, $\tilde{g}(b) = c$, $\tilde{g}(c) = a$.

   б) Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различные целые числа, то многочлен $g(x) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n) -1$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

5. а) $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, $\tilde{g}$ принимает значение k в двух различных точках $a, b\in \boldsymbol{Z}$. Доказать, что не существует $c, d \in \boldsymbol{Z}$, таких, что $\tilde{g}(c) = k-1$, $\tilde{g}(d) = k+1$.

   б) Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различные целые числа, то многочлен $g(x) = -(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) -1$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

6. а) Существует ли $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$, такой, что $\tilde{g}(2) = 2000$, $\tilde{g}(6) = 2002$?

   б) Доказать, что если $g(x)\in \boldsymbol{Z}[x]$ и $\tilde{g}$ принимает значение 1 более чем при трех целых значениях переменной, то $\tilde{g}(a)$ [1] -1 при любых целых a.

Задание 35

А. С помощью подходящей замены доказать неприводимость многочлена над $\boldsymbol{Q}$, пользуясь критерием Эйзенштейна.

1. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 29x + 13$.
2. $x^4 + 12x^3 + 56x^2 + 120x + 105$.
3. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 8$.
4. $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 35x + 28$.
5. $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 35x + 16$.
6. $x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 65$.

Б. 1) Доказать, что $\boldsymbol{Z}[x]$ не является кольцом главных идеалов.

2) Доказать, что элементы 2 и x кольца $\boldsymbol{Z}[x]$ взаимно просты, однако не существует элементов $u, v \in \boldsymbol{Z}[x]$, таких, что $u2+vx=1$.

3) Доказать, что если $f, g \in \boldsymbol{Z}[x]$, g примитивный многочлен и $h \in \boldsymbol{Q}[x]$, причем $g \cdot h \in \boldsymbol{Z}[x]$, то $h \in \boldsymbol{Z}[x]$. Показать на примере, что примитивность g здесь существенна.

4) Привести пример многочлена $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$, простого в $\boldsymbol{Z}[x]$ и составного в $\boldsymbol{Q}[x]$.

5) Привести пример многочлена $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$, простого в $\boldsymbol{Q}[x]$ и составного в $\boldsymbol{Z}[x]$.

6) Доказать, что множество простых элементов кольца $\boldsymbol{Z}[x]$ есть объединение множества простых чисел $\boldsymbol{Z}$ и множества примитивных многочленов, неприводимых над $\boldsymbol{Q}$.

Задание 36. Составить каталог неприводимых над $\boldsymbol{Z}_p$ многочленов.

1. $\deg f \le 5$ в $\boldsymbol{Z}_2[x]$.
2. $\deg f \le 4$ в $\boldsymbol{Z}_3[x]$.
3. $\deg f \le 3$ в $\boldsymbol{Z}_5[x]$.
4. $\deg f \le 3$ в $\boldsymbol{Z}_7[x]$.
5. $\deg f \le 2$ в $\boldsymbol{Z}_{11}[x]$.
6. $\deg f \le 2$ в $\boldsymbol{Z}_{13}[x]$.

Задание 37. Разложить на неприводимые над $\boldsymbol{R}$ множители.

1. а) $x^3+9x^2+11x-21$.
   б) $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4-1$.
   в) x^4+5x^2+6.
   г) x^4-2x^2+25.
   д) $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.
   е) $15x^4+49x^3+64x^2+49x+15$.
   ж) $x^4+2x^3-16x^2-2x+15$.
   з) $(x-1)^3+(2x+3)^3-27x^3-8$.
2. а) x^3-6x^2-x+30.
   б) $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10$.
   в) x^4+5x^2+4.
   г) x^4-10x^2+169.
   д) $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$
   е) $x^4-10x^3+26x^2-10x+1$.
   ж) $x^4-x^3+3x^2-2x+2$.
   з) $(2x-a-b)^3-(x-a)^3-(x-b)^3$.
3. а) $x^3+9x^2+23x+15$.
   б) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)-1$.
   в) x^4-2x^2-15.
   г) x^4-5x^2+9.
   д) $x^4+5x^2(x+1)-6(x+1)^2$.
   е) $3x^4+7x^3+7x+3$.
   ж) $12x^4-4x^3-9x^2+1$.
   з) $x^{12}-1$.
4. а) x^4+x^2+6x-8.
   б) $(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)+3(1-x-x^2)$.
   в) x^4+x^2-6.
   г) x^4+81.
   д) $(x^2+x+1)^2-x^2(3x^2+x+1)$.
   е) $2x^4-9x^3+9x+2$.
   ж) $x^5-6x^4+9x^3-6x^2+8x$.
   з) $x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.
5. а) $x^3-x^2-21x+45$.
   б) $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)+5(2x^2+3x+2)$.
   в) x^4-x^2-12.
   г) x^4+x^2+49.
   д) $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)-15(x^2+5x+10)$.
   е) $30x^4-17x^3-228x^2+17x+30$.
   ж) $x^4-2x^3+2x^2+2x+1$.
   з) x^6+27.

6. а) $9x^3-15x^2-32x-12$.
б) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120$.
в) x^4+2x^2-15.
г) $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$.
д) $10x^2(x-2)^2-9(x^2+(x-2)^2)$.
е) $12x^4-44x^3+63x^2-44x+12$.
ж) $4x^4-24x^3+29x^2+42x-63$.
з) x^4-2x^3+2x-1.

ЧАСТЬ 3

Система заданий к семестровым экзаменам

§ 1. Системы векторов и системы линейных уравнений

1. $a, b, c \in \boldsymbol{R}^n$, $a = b + c$. Верно ли, что множество линейных комбинаций вектора a совпадает с множеством линейных комбинаций векторов b и c?
2. Даны векторы a и b: $a = (1; 2; 2)$, $b = (3; -2; 1)$. Верно ли, что существует вектор $c \in \boldsymbol{R}^3$, который единственным образом линейно выражается через векторы a и b?
3. Существует ли вектор $b \in \boldsymbol{R}^3$, который не является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3, где $a_1 = (1; 2; 1)$, $a_2 = (2; 3; 3)$, $a_3 = (3; 7; 1)$?
4. Пусть a_1, a_2, a_3 – базис системы векторов $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$, $a_4 = a_1 + a_2$, $a_5 = a_1 + a_2 + a_3$. Составят ли базис этой системы векторы a_4, a_5? a_3, a_4, a_5? a_3, a_4, a_5, a_6?
5. $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in \boldsymbol{R}^2$. Что можно сказать о линейной зависимости или линейной независимости систем $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$?
6. Векторы $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2$ таковы, что $a_1 = 2b_1 - 5b_2$, $a_2 = 17b_1$, $a_3 = 14b_2$, $a_4 = b_1 - b_2$. Что можно сказать о линейной зависимости или линейной независимости систем векторов $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$?
7. Векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и каждый из этих векторов является линейной комбинацией векторов $b_1, \ldots, b_k$. Можно ли сказать что-либо о числе k?
8. Доказать, что система векторов $\{a_1, a_2 \ldots a_k\}$ линейно независима в $\boldsymbol{R}^n$ тогда и только тогда, когда её можно дополнить до базиса $\boldsymbol{R}^n$.
9. Пусть вектор b является линейной комбинацией векторов линейно зависимой системы. Доказать, что этот вектор имеет бесконечно много разложений по векторам этой системы.
10. Каким должно быть число $\alpha \in \boldsymbol{R}$, чтобы векторы $(1; 1; 1)$ и $(1; \alpha; \alpha^2)$ составляли базис $\boldsymbol{R}^3$?
11. Доказать, что базис системы векторов можно определить как минимальную (по включению) систему образующих эту систему векторов.
12. В каких случаях конечная система векторов обладает единственным базисом (описать все такие случаи)?
13. Привести примеры такой системы линейных уравнений, которая имеет одно решение, а при изменении некоторых свободных членов получается система, имеющая бесконечное множество решений.
14. Возможна ли такая ситуация: система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, а при изменении некоторых свободных членов получается система, не имеющая решений (привести пример или обосновать невозможность)?
15. Однородная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений. Нулевые свободные члены заменили некоторыми числами. Всегда ли получившаяся система имеет решение?
16. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений подверглась элементарным преобразованиям. Будет ли получившаяся система векторов оставаться фундаментальной системой решений?
17. Сформулировать и доказать утверждение, обратное свойству решений однородной системы линейных уравнений.

18. Доказать, что если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа переменных, то любые два решения этой системы пропорциональны.
19. Пусть все координаты векторов, образующих ФСР однородной системы линейных уравнений, являются рациональными числами. Доказать, что существует ФСР, все координаты которых являются целыми числами.
20. Указать достаточное условие, связывающее числа m и n, для того, чтобы совместная система m линейных уравнений с n переменными имела более одного решения.
21. Доказать, что две совместные системы линейных уравнений с одними и теми же переменными равносильны тогда и только тогда, когда обе они приводятся с помощью элементарных преобразований к одному и тому же ступенчатому виду.
22. Доказать, что если матрицы A и B имеют одинаковое число строк и ранг матрицы A не изменяется от приписывания к ней любого столбца матрицы B, то ранг не изменится при приписывании к A всех столбцов матрицы B.
23. Пусть матрица A имеет формат $m \times n$ и строки матрицы линейно независимы. Доказать, что m £ n.
24. Строками матрицы B являются столбцы матрицы A, записанные в каком-то порядке. Доказать, что ранги матриц A и B равны.
25. Доказать, что система векторов $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда существует вектор b, который единственным образом линейно выражается через векторы этой системы
26. Доказать, что вектор b является линейной комбинацией системы векторов $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ тогда и только тогда, когда ранг системы $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ равен рангу системы $\{a_1, a_2, \dots a_k, b\}$.
27. Ранг системы $\{a_1, a_2, \dots a_k, a_{k+1}\}$ равен k, причем $a_1+a_2+ \dots +a_k+a_{k+1} = \theta$. Доказать, что любые k векторов этой системы образуют ее базис.
28. В n-мерном арифметическом пространстве вектор b единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов системы
$\{a_1, a_2, \dots a_n\}$. Доказать, что векторы $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ образуют базис всего векторного пространства.

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие классы объектов. Ответ объяснить.

29. A — множество всех систем линейных уравнений.
B — множество всех совместных систем линейных уравнений.
C — множество всех однородных систем линейных уравнений.
D — множество всех систем линейных уравнений, имеющих различные ранги основной и расширенной матриц (все системы — от одних и тех же переменных).
30. A — множество всех систем, состоящих из p векторов $a_1, a_2, \dots, a_p$, таких, что $0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_p = \theta$.
B — множество всех линейно независимых систем векторов, содержащих p элементов.
C — множество всех систем векторов, состоящих из p векторов, ранг которых меньше p.
D — множество всех систем векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, в которых подсистема $\{a_2, \dots a_p\}$ линейно зависима ($p \geq 2$).
31. A — множество всех систем линейных уравнений, у которых ранг расширенной матрицы на единицу больше ранга основной матрицы.
B — множество всех совместных систем линейных уравнений.
C — множество всех однородных систем линейных уравнений.
D — множество всех однородных систем линейных уравнений, ранг основной матрицы которых равен числу переменных (все системы от одних и тех же переменных).
32. Система векторов

$$\{a_1, a_2, \dots a_k\} \qquad (1)$$

линейно зависима. Истинно или ложно каждое из следующих высказываний:

a) всякая подсистема системы (1) линейно зависима;
b) система (1) содержит хотя бы одну линейно независимую подсистему;
c) ранг системы (1) меньше k;
d) вектор a_k линейно выражается через предыдущие векторы?

§ 2. Матрицы и определители. Комплексные числа

1. Пусть через ${}^tA$ обозначается матрица, полученная из матрицы A путем транспонирования. Доказать свойства транспонирования:
   a) ${}^t0 = 0$; b) ${}^tE = E$; c) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$; d) ${}^t(aA) = a\,{}^tA$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$;
   e) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$; f) если A невырожденная матрица, то ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.
2. Доказать, что если A и B симметрические матрицы одного порядка, то AB – симметрическая матрица тогда и только тогда, когда A и B перестановочны.
3. Доказать, что любая квадратная матрица представляется в виде суммы двух матриц, одна из которых симметрическая, а другая кососимметрическая. Написать какую-нибудь конкретную матрицу и представить ее в виде указанной суммы.
4. Доказать, что матрица A является диагональной матрицей тогда и только тогда, когда A перестановочна со всеми диагональными матрицами.
5. Найти вид матрицы, перестановочной со всеми матричными единицами E_{ij}.
6. Доказать, что две $k\times n$-матрицы A и B равны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AX = BX$ для всех $n\times 1$-матриц X.
7. Для невырожденных матриц A и B доказать равносильность следующих равенств: $AB = BA$; $A^{-1}B = BA^{-1}$; $AB^{-1} = B^{-1}A$; $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
8. Доказать, что если квадратная ненулевая матрица A вырожденная, то существует матрица $B \neq 0$, такая, что $AB = BA = 0$.
9. Верна ли, что матрица, обратная к невырожденной треугольной матрице, также является треугольной матрицей того же вида?
10. Доказать, что любая $k\times n$-матрица ранга 1 может быть представлена в виде произведения $(k\times 1)$- и $(1\times n)$-матриц.
11. Справедливо ли для квадратных матриц одинакового порядка тождество $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$? Доказать или привести опровергающий пример.
12. Пусть A невырожденная $n \times n$-матрица, φ: $\boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ задается правилом $\varphi(x) = xA$. Доказать, что φ биекция.
13. Известно, что для матриц A и B выполняются условия $A + B = E$; $A + B = 0$. Доказать, что $A^2 = A$, $B^2 = B$, $BA = 0$.
14. Коэффициенты при неизвестных в системе n линейных уравнений с n неизвестными обладают следующим свойством: система разрешима при любых значениях свободных членов. Следует ли отсюда, что матрица коэффициентов невырожденная?
15. Как изменится A^{-1}, если в матрице A:
    a) переставить i-ю и j-ю строки;
    b) i-ю строку умножить на $\lambda \neq 0$;
    c) i-ю строку умножить на λ и прибавить к j-й строке?
16. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.
17. Пусть $A = (a_{ij})$, $A^* = (A_{ij})$ где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Доказать, что если $\det A = 0$, то $r(A^*) \leq 1$ (матрица A^* называется присоединенной к матрице A).
18. Доказать, что если какая-либо строка квадратной матрицы состоит только из единиц, то сумма алгебраических дополнений всех элементов этой матрицы равна определителю этой матрицы.
19. Вычислить определитель путем возведения его в квадрат:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

20. Найти связь между определителем матрицы $A = (a_{ij})$ и определителем присоединенной матрицы $A^* = (A_{ij})$.
21. Доказать, что если A и B ненулевые квадратные матрицы, такие, что $AB = 0$, то $\det A = \det B = 0$.
22. При каких $l \in \boldsymbol{C}$ умножение квадратной матрицы A порядка n на l не изменяет определителя матрицы? Найти общий вид всех таких λ.
23. Вычислить определители порядка n:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

24. Как изменится определитель, если каждый элемент матрицы, являющийся комплексным числом, заменить на комплексно сопряженное число?
25. У квадратной матрицы сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами. Можно ли сказать, чему равен определитель этой матрицы?
26. Для невырожденной квадратной целочисленной матрицы обратная ей матрица также целочисленная. Каким может быть определитель матрицы?
27. Пусть векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ являются линейными комбинациями векторов $b_1, b_2, \dots, b_k$. Доказать, что если $a_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, b_j$ и det $(a_{ij}) \neq 0$, то $r(a_1, a_2, \dots, a_k) = r(b_1, b_2, \dots, b_k)$.
28. Как изменится определитель, если каждый элемент матрицы заменить элементом, симметричным ему относительно центра матрицы?
29. Определим на $\boldsymbol{C}$ отношение ρ таким образом: $(z_1, z_2) \in \rho \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что ρ отношение эквивалентности. Найти геометрическое представление для классов эквивалентности.
30. $\varphi: \boldsymbol{C}^* \to \boldsymbol{R}^*$ по правилу $\varphi(z) = |z|$. Доказать, что φ сохраняет операцию умножения. Изобразить φ геометрически.
31. $\varphi: \boldsymbol{C}^* \to \boldsymbol{R}^*$ по правилу $\varphi(z) = \dfrac{z}{|z|}$. Доказать, что φ сохраняет операцию умножения. Изобразить φ геометрически.
32. Доказать, что сумма всех корней степени n из произвольного комплексного числа равна нулю.
33. Найти все комплексные числа, комплексно сопряженные своей n-й степени.
34. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям: a) $0 < Re\, iz < 1$; b) $Re\, z + Im\, z < 1$.
35. Изобразить геометрически множество комплексных чисел z, удовлетворяющим условиям $\dfrac{z-5}{z+7} = \cos\alpha + i \sin\alpha$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$.
36. Изобразить геометрически множество комплексных чисел z, удовлетворяющим условию $arg\,(z + 3 - 2i) = \dfrac{\pi}{4}$.
37. Известно, что матрица A невырожденная. Определить, истинно или ложно высказывание (ответ обосновать):
    a) строки матрицы линейно независимы, а относительно столбцов ничего конкретного сказать нельзя;
    b) $\det A \neq 0$;
    c) для любой квадратной матрицы B такого же порядка $\det AB \neq 0$;
    d) для любой квадратной матрицы B такого же порядка матрица AB также невырожденная;
    e) ранг матрицы A равен числу столбцов этой матрицы.

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие классы объектов. Ответ обосновать.

38. A — множество всех квадратных матриц порядка n.
    B — множество всех невырожденных матриц порядка n
    C — множество всех матриц порядка n, определитель которых отличен от нуля.
    D — множество всех квадратных матриц порядка n, ранг которых равен n–1 (здесь $n > 2$).
39. A — множество всех квадратных матриц, определитель которых равен нулю.
    B — множество всех квадратных матриц.

C — множество всех обратимых матриц.

D — множество всех квадратных матриц, являющихся основными матрицами однородных систем линейных уравнений, имеющих ненулевые решения (все матрицы одинакового порядка).

§ 3. Группы

1. Доказать, что если на множестве A задана бинарная ассоциативная операция $\mathbf{0}$, то при любом способе расстановки скобок произведение элементов
$a_1, a_2, \dots, a_n$ в заданном порядке равно произведению
$$((\dots((a_1 \mathbf{0} a_2)\mathbf{0}\dots)\mathbf{0}\, a_{n-1})\mathbf{0}\, a_n.$$
2. А. Доказать, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, где $a \in \boldsymbol{R}^*$, замкнуто относительно обычного умножения матриц.
Б. Найти истинностные значения следующих высказываний. Обосновать свои выводы:
а) данное множество не группа, так как не содержит единичной матрицы;
б) данное множество группа: для нее справедливы все аксиомы группы;
в) множество не группа, так как содержит только вырожденные матрицы а они не имеют обратных;
г) является группой, так как операция умножения матриц ассоциативна и в этом множестве определена операция, обратная для умножения:
$$(a):(b) = (\frac{a}{b}).$$
3. Пусть H_1 и H_2 подгруппы группы $\langle G; \cdot \rangle$. Доказать: H_1H_2 — подгруппа группы G тогда и только тогда, когда $H_1H_2 = H_2H_1$.
4. Найти все подгруппы циклической группы порядка 10.
5. Доказать, что множество корней всевозможных натуральных степеней из 1 образует подгруппу в группе $\langle C^*; \cdot \rangle$.
6. Пусть $\langle G; \cdot \rangle$ — группа, H — подгруппа группы G, $N_H = \{x: x^{-1}Hx = H\}$.
а) Доказать, что N_H подгруппа группы G.
б) Доказать, что N_H наибольшая (по включению) подгруппа среди всех подгрупп, для которых H является нормальной подгруппой.
7. Доказать, что всякая бесконечная группа содержит бесконечно много подгрупп.
8. Доказать, что множество всех четных подстановок A_n n-элементного множества составляет подгруппу в группе всех подстановок S_n, не пользуясь разложением подстановки в произведение транспозиций.
9. Доказать, что если порядок элемента a группы G равен n, то $a^k = e$ тогда и только тогда, когда k делится на n.
10. Доказать, что всякая конечная подгруппа группы $\langle C^*; \cdot \rangle$ является циклической группой.
11. Доказать, что всякая конечная мультипликативная числовая полугруппа S является группой или группой с нулем. Как устроены такие полугруппы порядка n?
12. В группе $\langle \mathbf{Z}; + \rangle$ рассмотрим множество $H = \{x: x = 15a + 10b, a, b \in \boldsymbol{Z}\}$. Доказать, что H подгруппа в $\boldsymbol{Z}$, следовательно, циклическая подгруппа. Найти образующие элементы H.
13. Доказать, что если в группе $\langle G; \cdot \rangle$ подмножество H является подгруппой, то для любого $a \in G$ подмножество $a^{-1}Ha$ также является подгруппой.
14. Доказать, что если в группе $\langle G; \cdot \rangle$ подмножества H_1, H_2 являются подгруппами, причем H_1 нормальная подгруппа, то H_1H_2 также является подгруппой.
15. Доказать, что если в конечной группе $\langle G; \cdot \rangle$ порядки подгрупп H_1, H_2 — числа взаимно простые, то $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

16. Доказать, что в абелевой группе если элемент a имеет конечный порядок, а элемент b имеет бесконечный порядок, то элемент ab имеет бесконечный порядок.
17. Доказать, что в группе невырожденных $n \times n$ - матриц над $\boldsymbol{R}$ если элемент A имеет конечный порядок, то $\det A = \pm 1$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.
18. Доказать, что если $z \in \boldsymbol{C}^*$ и имеет конечный порядок, то z является корнем некоторой натуральной степени из 1. Верно ли обратное утверждение?
19. Пусть $G = (a)$ — циклическая группа порядка n. Доказать, что для любого натурального числа d, являющегося делителем числа n, существует, причем единственная, подгруппа H порядка d.
20. Доказать, что если φ: $G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп и $a \in G_1$, причем порядок a конечный, то ord a делится на ord $\varphi(a)$.
21. Доказать, что если в абелевой группе порядки элементов a и b конечные, то их произведение также имеет конечный порядок, причем ord $a \cdot$ ord b делится на ord ab.
22. Пусть $\langle G; \cdot \rangle$ — абелева группа, H — множество всех элементов из G, имеющих конечный порядок. Доказать:

    а) H — подгруппа группы G;

    б) любой элемент из фактор-группы G/H, отличный от нейтрального, имеет бесконечный порядок.
23. Доказать по крайней мере двумя способами, что $\boldsymbol{C}^* / \sqrt[5]{1} \cong \boldsymbol{C}^*$.
24. Доказать, что в группе $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$:

    а) каждый элемент имеет конечный порядок;

    б) для любого $n \in \boldsymbol{N}$ имеется в точности одна подгруппа порядка n;

    в) эта подгруппа циклическая.
25. Доказать, что группа $\boldsymbol{Z}/7\boldsymbol{Z}$ циклическая.
26. Доказать, что если в группе $\langle G; \cdot \rangle$ H_1 и H_2 — нормальные подгруппы, причем $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, то любой элемент из H_1 перестановочен с любым элементом из H_2.
27. Пусть $G \subset S_n$ — подгруппа группы подстановок и G содержит хотя бы одну нечетную подстановку. Пусть H — множество всех четных подстановок, содержащихся в G. Доказать, что H — нормальная подгруппа группы G.
28. G_1 и G_2 — конечные группы порядков 48 и 36 соответственно. Существует ли эпиморфизм G_1 на G_2?
29. Существует ли эпиморфизм $\sqrt[24]{1}$ на S_3? Если существует, то привести пример. Если не существует, то объяснить причину.
30. Существует ли эпиморфизм циклической группы порядка 48 на циклическую группу порядка 8? Если существует, то привести пример. Обобщить задачу.
31. а) Доказать, что любая группа прядка 4 абелева. Изоморфны ли все эти группы?

    б) Те же вопросы для групп порядка 5.
32. Может ли группа быть изоморфной своей фактор-группе?
33. а) Доказать, что если конечная группа G_1 эпиморфно отображается на группу G_2, то порядок группы G_1 делится на порядок группы G_2.

    б) Пользуясь этим, найти все гомоморфизмы $\boldsymbol{Z}_{12} \to \boldsymbol{Z}_{25}$.
34. Доказать, что не существует эпиморфизма группы $\langle Q; + \rangle$ на группу $\langle Z; + \rangle$.
35. Пусть $\langle G; \bullet \rangle$ — конечная циклическая группа. Доказать, что группа $\langle G_1; \mathbf{0} \rangle$ является эпиморфным образом $\langle G; \bullet \rangle$ тогда и только тогда, когда G_1 циклическая группа и порядок G_1 делит порядок G.
36. Доказать, что в группе $\langle Z; + \rangle$ любая ненулевая подгруппа изоморфна самой группе.
37. Пусть φ: $G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп $\langle G_1; \bullet \rangle$ и $\langle G_2; \mathbf{0} \rangle$. Доказать, что полный прообраз любого элемента из G_2 либо пуст, либо представляет собой левый (= правый) смежный класс группы G_1 по подгруппе $H = Ker\varphi$.
38. Доказать, что группа $\langle G; \cdot \rangle$ абелева тогда и только тогда, когда отображение φ: $x \to x^{-1}$ является автоморфизмом группы.
39. Пусть $\langle G; \cdot \rangle$ — группа, ρ — отношение эквивалентности на G, стабильное справа, то есть удовлетворяющее условию $a\rho b \Rightarrow (\forall c)(ac\rho bc)$. Доказать, что ρ является отношением правой смежности для некоторой подгруппы H, то есть, что существует подгруппа H группы G, такая, что $arb \Leftrightarrow Ha = Hb$.
40. Что общего между понятиями «порядок группы» и «порядок элемента группы»?

41. Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие классы объектов. Ответ объяснить.
A — множество всех циклических групп.
B — множество всех коммутативных групп.
C — множество всех групп подстановок.
D — множество всех групп невырожденных матриц.
E — множество всех конечных групп.

§ 4. Векторные и евклидовы пространства

1. Доказать, что если U подпространство векторного пространства V, $a \in U$, $a \neq \theta$, $b \notin U$, то векторы a и b линейно независимы.
2. Что представляют собой сумма и пересечение подпространства U симметрических матриц и подпространства W верхних треугольных матриц в пространстве квадратных матриц над полем P?
3. Пусть $x_0 \in [0; 1]$. Доказать, что пространство $C_{[0;1]}$ непрерывных на сегменте [0;1] действительных функций является прямой суммой подпространства U констант и подпространства I_{x_0} функций, обращающихся в нуль в точке x_0.
4. а) Сколько элементов содержит векторное пространство Z_p^n?
   б) Сколько упорядоченных базисов имеет это векторное пространство?
5. Пусть U_1 и U_2 подпространства векторного пространства V. Доказать, что если $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + 1$, то:
   а) $U_1 + U_2$ равняется одному из этих подпространств, а $U_1 \cap U_2$ — другому;
   б) одно из подпространств содержится в другом подпространстве;
   в) справедливы ли обратные утверждения?
6. Доказать, что пространство $\boldsymbol{R}^n$ есть прямая сумма подпространств U и W, где
$$U = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n): \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0\};$$
$$W = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n): \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n\}.$$
   Найти проекции единичных векторов e_i на U параллельно W и на W параллельно U.
7. Образует ли множество верхних треугольных матриц подалгебру в линейной алгебре квадратных матриц над полем P? Если образует, то какова ее размерность?
8. Пусть U подпространство пространства $P[x]$ всех многочленов над полем P, обладающее свойствами:
   1) для любых $k \leq n$ U содержит хотя бы один многочлен степени k;
   2) U не содержит ни одного многочлена степени $> n$.
   Доказать, что U совпадает с подпространством $P_n[x]$ всех многочленов над P, степени которых $\leq n$.
9. Доказать, что если U_1, U_2 подпространства векторного пространства V, то $U_1 + U_2$ совпадает с пересечением всех подпространств пространства V, содержащих как U_1, так и U_2.
10. Доказать, что в любом векторном пространстве V линейная оболочка $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$ является наименьшим по включению подпространством этого пространства, содержащим векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$.

11. Доказать, что для того, чтобы векторное пространство V было прямой суммой своих подпространств U_1, U_2 , необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств составило базис всего пространства.
12. Доказать, что если U_1, U_2 подпространства пространства V и их объединение совпадает с V, то или U_1, или U_2 совпадает с V.
13. Пусть U_1, U_2, U_3 подпространства пространства V.
    а) Показать, что равенство $U_1 \cap (U_2+U_3) = U_1 \cap U_2+U_1 \cap U_3$ выполняется не всегда.
    б) Доказать равенство $U_1 \cap (U_2+U_1 \cap U_3) = U_1 \cap U_2+U_1 \cap U_3$
14. Возможно ли, чтобы подпространство U векторного пространства V, ненулевое и отличное от самого V, имело единственное дополнение?
15. Доказать, что если $\{a_1, a_2, \dots , a_n\}$ базис евклидова пространства V и $(a_k, x) = (a_k, y)$ для всех $k = \overline{1,n}$, то $x = y$.
16. Доказать, что если $\{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ ортонормированный базис евклидова пространства V, то $x = \sum_k (x, e_k)e_k$ для любого вектора $x \in V$.
17. Доказать, что если $\{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ ортонормированный базис евклидова пространства V и $x, y \in V$, то $(x, y) = \sum_k (x, e_k)(y, e_k)$.
18. Доказать, что в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ любое подпространство можно считать подпространством решений некоторой системы линейных уравнений.
19. Доказать, что в евклидовом пространстве V для любых подпространств U, U_1, U_2 имеют место равенства:
    а) $V^{\perp} = \theta$;
    б) $\theta^{\perp} = V$;
    в) $(U^{\perp})^{\perp} = U$;
    г) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;
    д) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.
20. Пусть процесс ортогонализации преобразует систему векторов $\{a_1, a_2,\dots, a_n\}$ в систему векторов $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
    Доказать:
    а) процесс сохраняет ортогональность;
    б) $|b_k| \le |a_k|$;
    в) $|b_k| = |a_k| \Leftrightarrow a_k$ ортогонален всем предыдущим векторам;
    г) $b_k = \theta \Leftrightarrow a_k$ линейно выражается через предыдущие векторы.
21. Пусть процесс ортогонализации преобразует систему векторов $\{a_1, a_2, \dots , a_s\}$ в систему векторов $\{b_1, b_2, \dots , b_s\}$.
    Доказать:
    а) если система $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ линейно зависима, то $\theta \in \{b_1, b_2, \dots , b_s\}$;
    б) если векторы $b_1, b_2, \dots , b_{k-1}$ ненулевые, а $b_k = \theta$, то система $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ линейно независима, а a_k линейно выражается через предыдущие векторы.
22. Пусть $a \in \boldsymbol{R}^n$. Найти размерность подпространства векторов x, для которых выполняется равенство $(x, a) = 0$.

23. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ базис действительного пространства V. Доказать, что можно так определить скалярное произведение в V, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составят ортонормированный базис пространства V.
24. Пусть система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно независима и системы $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ и $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ – ортогональные системы ненулевых векторов, такие, что $b_i, c_i \in L(a_1, \ldots, a_i)$, $i = \overline{1,k}$. Доказать: $b_i = \alpha_i c_i$, где $\alpha_i \neq 0$.
25. Доказать, что в евклидовом пространстве V ранг системы векторов равняется размерности пространства V тогда и только тогда, когда существует только единственный вектор, ортогональный всем векторам этой системы (какой?).

§ 5. Линейные отображения и линейные операторы

1. Пусть φ_1 и φ_2 линейные операторы пространства $\boldsymbol{R}^3$, определенные следующим образом: φ_1 есть поворот вокруг оси Oz на угол 90°, φ_2 — поворот вокруг оси Oy на угол 90°. Верно ли, что:
   а) $(\varphi_1\varphi_2)^2 = \varphi_1^2\varphi_2^2$;
   б) $\varphi_1^2\varphi_2^2 = \varphi_2^2\varphi_1^2$;
   в) $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$?
   г) показать, что, зная ответ на а), можно сразу ответить на б).
2. Пусть V — n-мерное векторное пространство, $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, где $k < n$ — линейно независимая система векторов, а $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – произвольная система векторов пространства.
   а) Верно ли, что существует линейный оператор φ: $V \to V$, переводящий векторы a_i в векторы b_i, $i = \overline{1,k}$?
   б) Сколько таких линейных операторов существует (поле коэффициентов $\boldsymbol{R}$)?
3. а) Доказать, что ранг матрицы сюръективного линейного отображения конечномерных векторных пространств равен числу строк, а ранг матрицы инъективного линейного отображения равен числу столбцов этой матрицы.
   б) Вывести отсюда, что всякий инъективный линейный оператор конечномерного векторного пространства является сюръекцией и наоборот.
4. Пусть V_1, V_2 векторные пространства размерностей m и n соответственно, над полем $\boldsymbol{Z}_p$. Сколько существует линейных отображений из V_1 в V_2?
5. Привести примеры:
   а) инъективного, но не сюръективного линейного оператора;
   б) сюръективного, но не инъективного линейного оператора.
6. Доказать, что если φ и ψ линейные операторы конечномерного векторного пространства V и $j \circ \psi = \varepsilon_V$, то φ и ψ автоморфизмы.
7. Доказать, что если $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — базисы векторного пространства V, φ — такой линейный оператор, что $\varphi(a_k) = b_k$, $k = \overline{1,n}$ и A — матрица этого линейного оператора, то $\det A \neq 0$.
8. Доказать, что линейный оператор n-мерного векторного пространства обратим тогда и только тогда, когда он сохраняет линейную независимость.

9. Доказать, что если линейный оператор конечномерного пространства переводит систему образующих в систему образующих, то он является автоморфизмом.
10. Доказать, что линейный оператор n-мерного пространства является автоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого подпространства U его размерность и размерность его образа равны.
11. Доказать, что если φ: $V \to W$ линейное отображение, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ базис V, причем система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ составляет базис $Ker\ \varphi$, то $\{\varphi(a_{k+1}), \ldots, \varphi(a_n)\}$ линейно независимая в W система векторов.
12. Доказать, что если φ линейный оператор V, для которого выполняется равенство $\varphi^2 = \varphi$, то $V = Ker\varphi \oplus Im\varphi$.
13. Доказать, что всякое подпространство векторного пространства является
    а) ядром некоторого линейного оператора;
    б) образом некоторого линейного оператора.
14. Построить два различных линейных оператора векторного пространства, имеющих одинаковые образ и ядро.
15. Пусть V векторное пространство над $\boldsymbol{R}$, φ и ψ линейные отображения V в $\boldsymbol{R}$. Доказать, что если $Ker\varphi \subset Ker\psi$, то существует $\alpha \in \boldsymbol{R}$ такое, что $\psi = \alpha\varphi$.
16. Доказать, что линейный оператор φ является подобием тогда и только тогда, когда любой ненулевой вектор является собственным вектором оператора φ.
17. Зная, что l^2 является собственным значением оператора φ^2, доказать, что или l, или $-l$ является собственным значением линейного оператора φ.
18. Доказать, что свободный член характеристического многочлена невырожденного линейного оператора отличен от нуля.
19. Доказать равносильность следующих трех утверждений:
    а) матрица A невырожденная;
    б) $A = M(\varphi)$, для некоторого линейного оператора φ, причем $Ker\varphi = \theta$;
    в) матрица A не имеет собственного значения, равного нулю.
20. Доказать, что если матрица A имеет простую структуру, то простую структуру будут иметь матрицы A, A^*, A^{-1} (если A невырожденная матрица).
21. Доказать, что собственные значения и характеристические многочлены матриц A и ${}^tA$ совпадают.
22. Доказать, что если A и B – $n \times n$- матрицы и хотя бы одна из этих матриц невырожденная, то матрицы AB и BA подобны.
23. Система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно независима над полем $\boldsymbol{Z}_p$. Доказать, что эта система векторов, рассматриваемая над $\boldsymbol{Q}$, также линейно независима.
24. Найти $\dim End\ V$ и $\dim Hom(V_1, V_2)$, если $\dim V = n$, $\dim V_1 = s$, $\dim V_2 = t$.
25. Доказать, что в n-мерном пространстве для каждого линейного оператора φ существует ненулевой многочлен $f(x)$ степени $< n^2$ такой, что $f(\varphi) = 0$.
26. Доказать, что множество решений системы линейных уравнений является полным прообразом некоторого элемента при некотором линейном отображении.
27. Привести пример линейного оператора, имеющего только два инвариантных подпространства.

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие классы объектов.

Ответ объяснить. В задачах 29–31 все пространства конечномерные пространства над полем $\boldsymbol{R}$, причем в задаче 31 размерность пространства ≥ 2.

28. A — множество всех линейных операторов векторных пространств.
    B — множество всех инъективных линейных операторов.
    C — множество всех сюръективных линейных операторов.
    D — множество всех автоморфизмов векторных пространств.
    E — множество всех линейных операторов конечномерных векторных пространств.
29. A — множество всех линейных операторов с ненулевым ядром.
    B — множество всех инъективных линейных операторов.
    C — множество всех проектирований.
    D — множество всех сюръективных линейных операторов.
    E — множество всех линейных операторов дефекта 1.
30. A — множество всех линейных отображений, сохраняющих линейную независимость.
    B — множество всех сюръективных линейных отображений.
    C — множество всех инъективных линейных отображений.
    D — множество всех линейных отображений, имеющих положительный дефект.
    E — множество всех линейных отображений, сохраняющих линейную зависимость.
31. A — множество всех линейных операторов над $\boldsymbol{R}$, не имеющих действительных собственных значений.
    B — множество всех автоморфизмов.
    C — множество всех вырожденных линейных операторов.
    D — множество всех линейных операторов с ненулевым ядром.
    E — множество всех линейных операторов, имеющих базисы, состоящие из собственных векторов.

§ 6. Кольца

1. а) Пусть $\langle \boldsymbol{R};\ \oplus,\ \otimes \rangle$ — алгебра, где $\oplus$ — обычное сложение чисел, а операция $\otimes$ определяется следующим образом:

$$a \otimes b = \begin{cases} a, \text{ если } a = b, \\ 0, \text{ если } a \neq b. \end{cases}$$

   Является ли эта алгебра кольцом?

   б) Тот же вопрос, если $\otimes$ определяется так: $a \otimes b = a$.

2. а) Доказать, что множество верхних треугольных матриц с коэффициентами из поля P образует подкольцо в кольце всех квадратных матриц данного порядка над полем P.

   б) Верно ли, что каждый ненулевой элемент этого кольца является либо делителем нуля, либо делителем единицы?

3. а) Показать, что любую абелеву группу $(G; +)$ можно превратить в кольцо, определив умножение $\circ$ на G следующим образом: $a \circ b = 0$.
   б) Как устроены идеалы этого кольца?
4. Пусть $\langle A; \circ \rangle$ полугруппа, содержащая более одного элемента, где операция $\circ$ определяется следующим образом: $x \circ y = x$ для любых $x, y \in A$. Доказать, что нельзя так определить операцию + на A, чтобы алгебра $\langle A; +, \circ \rangle$ являлась кольцом.
5. Ассоциативное кольцо со свойством $(\forall a)(a^2 = a)$ называется булевым кольцом. Доказать:
   а) булево кольцо коммутативно;
   б) в булевом кольце выполняется тождество $-a = a$;
   в) булево кольцо является целостным кольцом тогда и только тогда, когда состоит лишь из двух элементов.
6. Пусть A — кольцо с единицей e, A_1 — подкольцо в A с единицей e_1, причем $e_1 \neq e$. Доказать, что e_1 делитель нуля в кольце A. Привести пример такого кольца A.
7. Доказать, что в кольце квадратных матриц порядка n над полем P, где $n \geq 2$, всякий ненулевой элемент является либо делителем нуля, либо делителем единицы.
8. Показать, что в кольце $\mathbf{Z}/(6)$ не всякое уравнение $ax = b$ разрешимо.
9. Найти истинностные значения следующих высказываний:
   а) подкольцо кольца с единицей может не содержать единицы;
   б) подкольцо кольца без единицы может иметь единицу;
   в) подкольцо некоммутативного кольца может быть коммутативным;
   г) подкольцо коммутативного кольца может быть некоммутативным;
   д) подкольцо кольца с единицей 1 может иметь единицу $e \neq 1$.

10. Доказать, что коммутативное кольцо является целостным кольцом тогда и только тогда, когда в нем выполняется закон сокращения.
11. Доказать, что в кольце $\mathbf{Z}_p$, где p — простое число, отличное от 2, каждое уравнение $x^{(p-1)/2} = 1$; $x^{(p-1)/2} = -1$ имеет в точности $(p-1)/2$ решения.
12. Понятие конечной цепной дроби и ее подходящих дробей можно определить для любого евклидова кольца. Какие свойства при этом сохраняются без изменения? Можно ли как-либо изменить формулировки оставшихся свойств, чтобы их основное содержание сохранилось при этом переносе?
13. Является ли идеалом кольца $n \times n$–матриц над $\mathbf{R}$ подмножество I, состоящее из матриц, у которых или первый столбец, или первая строка нулевые?
14. Доказать, что в кольце $\mathbf{R}[x, y]$ подмножество I, состоящее из многочленов с нулевым свободным членом, является идеалом, но не является главным идеалом.
15. Доказать: $(a) + (b) = (1) \Rightarrow (a) \cap (b) = (a)(b)$.
16. Доказать, что коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей является полем тогда и только тогда, когда это кольцо имеет только два идеала (какие?).
17. Образуют ли идеал необратимые элементы кольца $\mathbf{Z}_{16}$? $\mathbf{Z}_{12}$?
18. Доказать, что если I_1, I_2, I_3 идеалы кольца и $I_1 \subset I_2$, то $I_1 \cap (I_2 + I_3) = I_1 + I_2 \cap I_3$.
19. Разложить в кольце $\mathbf{Z}[i]$ целых гауссовых чисел число $a = 4 + 19i$ на простые множители.
20. Доказать, что в конечном коммутативном, ассоциативном кольце всякий ненулевой элемент является либо делителем единицы, либо делителем нуля.
21. Пусть p — простое натуральное число. Обозначим через $\mathbf{Z}_{(p)}$ множество всех рациональных чисел, таких, у которых знаменатель в представлении в виде несократимой дроби не делится на p.
    а) Доказать, что $\mathbf{Z}_{(p)}$ подкольцо в $\mathbf{Q}$.
    б) Найти группу делителей единицы кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$.
    в) Доказать, что $\mathbf{Z}_{(p)}$ факториальное кольцо. Как выглядит каноническое разложение произвольного элемента этого кольца?

22. Доказать, что любой кольцевой гомоморфизм поля либо является инъекцией, либо отображает все элементы в нуль.
23. Пусть A_1, A_2 кольца с единицами, $\varphi: A_1 \to A_2$ — гомоморфизм колец.
    а) Верно ли, что образ единицы кольца A_1 является единицей кольца A_2?
    б) Верно ли предыдущее утверждение, если φ эпиморфизм?
24. Найти все гомоморфизмы:
    а) групп $\boldsymbol{Z} \to 2\boldsymbol{Z}$;
    б) колец $\boldsymbol{Z} \to 2\boldsymbol{Z}$.
25. Пусть $A = C_{\boldsymbol{R}}$ – кольцо всех непрерывных на $\boldsymbol{R}$ функций, $x_0 \in \boldsymbol{R}$,
    $I_{x_0} = \{f \in A: f(x_0) = 0\}$. Доказать, что I_{x_0} идеал кольца A и что $A/I_{x_0} \cong \boldsymbol{R}$.
26. а) Можно ли кольцо с единицей эпиморфно отобразить на кольцо без единицы?
    б) Можно ли кольцо без единицы эпиморфно отобразить на кольцо с единицей?
27. Почему кольцо $\langle \boldsymbol{Z}; +, \cdot \rangle$ нельзя эпиморфно отобразить ни на какое свое подкольцо, отличное от 0 и самого $\boldsymbol{Z}$?
28. Доказать, что $\boldsymbol{R}[x]/(x - a) \cong \boldsymbol{R}$, где $a \in \boldsymbol{R}$.
29. Изоморфны ли кольца $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2 - 2)$ и $\boldsymbol{Q}[x]/(x^2 - 3)$?
30. Доказать, что группы $\langle \boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]; +\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}[\sqrt{3}]; +\rangle$ изоморфны, однако кольца $\langle \boldsymbol{Z}[\sqrt{2}]; +, \cdot\rangle$ и $\langle \boldsymbol{Z}[\sqrt{3}]; +, \cdot\rangle$ не изоморфны.
31. Найти все автоморфизмы кольца $\langle \boldsymbol{Q}[\sqrt{2}]; +, \cdot\rangle$.
32. Является ли кольцо $\langle \boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]; +, \cdot\rangle$ кольцом главных идеалов?
33. Составить диаграмму Эйлера-Венна для следующих классов колец:
    A — целостные кольца;
    B — кольца главных идеалов;
    C — факториальные кольца;
    D — поля;
    E — евклидовы кольца.
    Привести примеры и контрпримеры.

§ 7. Задачи по теории чисел

Если не оговорено противное, то все числа, встречающиеся в этом параграфе, являются целыми числами.

1. Доказать, что если $mn+pq$ делится на $m - p$, то $mq+np$ также делится на $m - p$.
2. Доказать, что если $ab + cd$ делится на n, $a - c$ делится на n и числа c и n взаимно простые, то $b + d$ делится на n.
3. Доказать, что $a^2 + b^2$ делится на 7 только тогда, когда a и b одновременно делятся на 7.
4. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые числа (натуральные),
   $M = m_1 m_2 \ldots m_k$, $M_i = \dfrac{M}{m_i}$, $i = \overline{1, k}$. Доказать, что числа вида
   $$M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_kx_k,$$
   где x_i пробегают полную систему вычетов по модулю m_i, составляют полную систему вычетов по модулю M.
5. Доказать что не существует двух последовательных нечетных чисел, каждое из которых представляет собой сумму квадратов двух целых чисел.
6. Доказать, что при любых $n \in \boldsymbol{N}$ сумма $1 + 2 + \ldots + n$ не может оканчиваться цифрами 2, 4, 7 и 9.
7. Доказать, что если a, b, c, d – взаимно простые с $m = ad - bc$ числа и $ax + by$ делится на m для некоторых $x, y \in \boldsymbol{Z}$, то $cx+dy$ также делится на m.
8. Доказать, что сумма квадратов пяти нечетных чисел не является полным квадратом.
9. p, q – простые числа, $p > q > 5$. Доказать, что $p^4 - q^4$ делится на 240.
10. Доказать, что число $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 4$, является простым числом тогда и только тогда, когда $(n-1)!$ не делится на n.
11. Доказать бесконечность числа простых чисел:
    а) вида $4k + 3$;

б) вида $6k + 5 (k \in \mathbf{Z}_+)$.

12. Доказать, что при любых $r \in \mathbf{Q}$, r ¹ 1, 0, числа вида $r + 1/r$ не являются целыми.
13. Доказать, что при любых $n > 1$ числа вида $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/n$ не являются целыми.
14. Написать каноническое разложение числа 50!
15. p_1, p_2 — два последовательных нечетных числа, $p_1+p_2 = 2q$. Доказать, что число q составное.
16. Доказать, что числа 10, 11, 12 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.
17. Доказать, что число lg 2 число иррациональное.
18. Доказать, что длины двух катетов прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами не могут выражаться простыми числами-близнецами.
19. Доказать, что $a^2 + ab + b^2$ делится на 9, если только a, b делятся на 3 одновременно.
20. Сформулировать и доказать признаки делимости на 3 и на 7 в восьмеричной системе счисления.
21. Сократить дробь 116690151/427863887.
22. Доказать, что квадрат любого нечетного числа оканчивается в восьмеричной системе счисления цифрой 1.
23. Коэффициентами многочлена $f(x)$ являются натуральные числа, меньшие, чем 10, $f(10) = 19981999$. Можно ли по этим данным восстановить многочлен?
24. Решить в $\mathbf{N}$ уравнения $\varphi(x) = x/3$ и $\varphi(x) = x/4$ (здесь φ – функция Эйлера).
25. Доказать, что $\varphi(2n)$ равняется $\varphi(n)$ или $2\varphi(n)$. Найти критерий для каждого из этих случаев.
26. Доказать, что при $n > 2$ множество $\{1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n\}$ содержит четное число несократимых дробей.
27. Доказать, что если числа a и b – взаимно простые, имеющие разную четность, то при любых $n \in \mathbf{N}$ числа $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$ также взаимно простые.
28. Пусть d – НОД чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Как найти представление d в виде линейной комбинации чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 2)$?
29. Доказать, что если $d = (a, b)$, $d' = (a', b')$, то $dd' = (aa', ab', a'b, bb')$.
30. Доказать, что если число a совершенное натуральное число, то $\sum_{a \mid k} 1/k = 2$.
31. Доказать, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ делится на 5 тогда и только тогда, когда n не делится на 4.
32. Доказать, что сотая степень любого целого числа либо делится на 125, либо дает при делении на 125 остаток 1.
33. Доказать: $(\forall x)(x^7 \equiv x \pmod{42})$.
34. Доказать: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m_1}, \\ a \equiv b \pmod{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \equiv b \pmod{m_k} \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{M}$, где $M = [m_1, m_2, \ldots m_k]$.
35. Верно ли, что если $ac \equiv bd \pmod{m}$ и $a \equiv b \pmod{m}$, то $c \equiv d \pmod{m}$? А если $(a, m) = 1$?
36. Доказать, что если p_1 и p_2 — различные простые числа, то $p_1^{p_2-1} + p_2^{p_1-1} \equiv 1 \pmod{p_1 p_2}$.
37. Пусть p – простое число, $p>2$, $m, n \in \mathbf{N}$. Доказать:
    $a^{(p-1)m} + a^{(p-1)n} \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$.
38. Доказать: если $p > 2$, то p – простое число $\Leftrightarrow (p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$.
39. Сколько решений имеет сравнение $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$?
40. Решить в натуральных числах уравнение $x + 1/(y + 1/z) = 10/7$.
41. Доказать, что дробь $n/(n^2 + n + 1)$ обращается в чисто периодическую десятичную дробь $(n \geq 1)$.
42. Существует ли основание системы счисления g, в которой дробь 7/15 представляется в виде:
    а) чисто периодической;
    б) конечной;
    в) смешанной периодической;
    г) непериодической дроби?
43. Не обращая числа 5/48 в g-ичную дробь, определить вид этой дроби и число цифр в периоде и предпериоде (в самой дроби, если она конечная) для
    $g = 3, 6, 7$.
44. Доказать, что сумма конечной и правильной чисто периодической дробей не может быть целым числом.
45. Доказать, что если знаменатель обыкновенной дроби взаимно прост с числом 6, то в четверичной системе счисления длина периода этой дроби делится на 3.
46. Доказать, что при любых $n > 1$ дробь $1/(n^3-n+1)$ представляется в виде чисто периодической шестеричной дроби.
47. Доказать, что если знаменатель правильной обыкновенной дроби в некоторой системе счисления оканчивается цифрой 1, то данная дробь в этой системе счисления будет чисто периодической.

48. Доказать, что произведение двух первообразных корней по модулю простого числа $p > 2$ не может быть первообразным корнем по этому модулю.

49. Доказать, что если $\operatorname{ord}_{m_1} a = k_1$, $\operatorname{ord}_{m_2} a = k_2$, $(m_1, m_2) = 1$ и $m = m_1m_2$, то $\operatorname{ord}_m a = [k_1, k_2]$.

50. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что если m нечетное число и $m = m_1m_2$, где $m_1, m_2 < m$, то не существует первообразных корней по модулю m.

51. а) Доказать, что не существует первообразных корней по модулю $m = 2m_1m_2$, где m_1 и m_2 нечетные числа, отличные от 1;

б) Доказать, что не существует первообразных корней по модулю $m = 2^k m_1$, где $k > 1$, m_1 нечетно и $m_1 \neq 1$;

в) Доказать, что по модулю $m = 2^k$, где $k > 2$, первообразные корни также не существуют;

г) По каким модулям могут существовать первообразные корни?

§ 8. Алгебра многочленов

1. Старший коэффициент многочлена $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]$ равен $1+\sqrt{2}$. Доказать, что при любом $k \in \boldsymbol{N}$ многочлен $(f(x))^k$ имеет иррациональный старший коэффициент.

2. Доказать, что при любом $n \in \boldsymbol{N}$

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\ldots(1 + x^{2^n}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^p.$$

Найти величину p.

3. Составить многочлен, корни которого обратны корням многочлена

$2x^3 + 6x^2 - x - 4$.

4. Пусть f_1 и f_2 взаимно простые многочлены над полем P, степени которых равны n_1 и n_2 и пусть U — пространство многочленов над P, степени которых не превосходят $n_1 + n_2 - 1$. Доказать, что $U = U_1 \oplus U_2$, где $U_1 = U \mathbf{I} (f_1)$,

$U_2 = U \mathbf{I} (f_2)$.

5. Пусть A – целостное кольцо с единицей. Доказать, что $A[x]$ является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда A — поле.

6. Доказать, что множество всех однородных многочленов степени k от n переменных вместе с нулем является векторным пространством. Найти размерность этого пространства.

7. Найти размерность пространства многочленов от n переменных, степени которых не превосходят k.

8. Доказать, что в $\boldsymbol{R}[x]$ многочлен $x^{37} + x^{35} + 1$ делится на многочлен x^2+x+1. Делится ли многочлен $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ на многочлен $2x^3 + 3x^2 + x$?

9. Известно, что $d = uf + vg$. Следует ли отсюда, что d является НОД-ом многочленов f и g?

10. d – НОД(f, g), $d = uf + vg$. Можно ли сказать, чему равен НОД(u, v)?

11. d – НОД многочленов f и g над полем P. Как изменится НОД (f, g), если их рассматривать как многочлены над некоторым расширением F поля P?

12. Простым или составным элементом является многочлен $2x^5 + 18x^2 + 6$ в кольце $\boldsymbol{Z}[x]$? В кольце $\boldsymbol{Q}[x]$?

13. Те же вопросы для многочлена $3x^6 - 12x + 18$.

14. $f(x) = (x^2 - \sqrt{3}x + 2)(x^2 + \sqrt{3}x + 2)$.

    а) Верно ли, что $f(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$?
    б) Приводим или неприводим $f(x)$ над $\boldsymbol{Q}$?

15. Те же вопросы для многочлена $(\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3})$.

16. Приводим или неприводим над $\boldsymbol{Q}$ многочлен $x^3 + 6x^2 - 8x - 12$?

17. Привести пример факториального кольца, не являющегося кольцом главных идеалов.

18. Числа a, b и c различные. Сколько корней имеет многочлен

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2?$$

19. Доказать, что если $\langle P; +, \cdot\rangle$ — поле, то в мультипликативной группе $\langle P^*; \cdot\rangle$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$ существует не более одной подгруппы порядка n.

20. Доказать, что если P конечное поле, состоящее из n элементов, то

$$x^n - x = \prod_{a \in P}(x-a).$$

21. $f, g \in \boldsymbol{R}[x]$, $\deg f = \deg g = n$, $f(x_0) = g(x_0)$, $(\forall k)(f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = \overline{1,n}$.

    Доказать, что $f = g$.

22. Пусть $\boldsymbol{R}_n[x]$ — векторное пространство всех многочленов над $\boldsymbol{R}$, степень которых не превосходит n, $a \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что многочлены

$$1,\ x-a,\ (x-a)^2,\ \ldots,\ (x-a)^n$$

    составляют базис этого пространства.

23. Составить многочлен $f \in \boldsymbol{Q}[x]$, для которого:

    а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является корнем;
    б) $\sqrt[3]{2} + 2$ является корнем.

    Приводимы или неприводимы над $\boldsymbol{Q}$ получившиеся многочлены?

24. Верно ли, что $\boldsymbol{Q}(\pi) = \boldsymbol{Q}(\pi^2)$?

25. Доказать, что если a алгебраический элемент над полем P и j его минимальный многочлен, то j не имеет кратных корней ни над каким расширением поля P.

26. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{R}$. Верно ли, что $\boldsymbol{R}(\alpha) = \boldsymbol{C}$?

27. Существует ли поле, содержащее поле комплексных чисел в качестве собственного подполя?

28. Пусть φ неприводимый многочлен степени n над полем $\boldsymbol{Z}_p$.

    а) Доказать, что $\boldsymbol{Z}_p[x]/(\varphi(x))$ является конечным полем.
    б) Найти число элементов этого поля.

29. а) Доказать, что $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.

б) Какова степень этого поля над $\boldsymbol{Q}$?

в) Указать какой-нибудь базис этого поля над $\boldsymbol{Q}$.

30. Найти все автоморфизмы поля $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

31. Найти все корни многочлена $x^4 + 4x^3 + 32x^2 + 12x + 87$, зная, что один из корней этого многочлена равен $-2 - 5i$.

32. Доказать, что если $f \in \boldsymbol{R}[x]$ и не имеет действительных корней, то все значения соответствующей многочленной функции имеют один и тот же знак. Верно ли обратное утверждение?

33. Решить в $\boldsymbol{R}$ уравнение $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$.

34. В $\boldsymbol{R}[x]$ найти вид всех таких многочленов, которые делятся на свою производную.

35. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ – корни многочлена $x^n - 1$, отличные от 1. Чему равняется $(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2) \ldots (2 - \alpha_{n-1})$?

36. $g \in \boldsymbol{R}[x]$ — многочлен 4-й степени, такой, что $\tilde{g}(1) = \tilde{g}(-1)$ и $\tilde{g}(2) = \tilde{g}(-2)$. Доказать, что $\tilde{g}$ четная функция.

Указания

Иногда нам будут требоваться результаты или способы рассуждения из предыдущих задач. При ссылках на задачи из другого параграфа будет употребляться двойная нумерация, если же задача содержится в этом же параграфе, то будет указываться только ее номер.

§ 2

2. Использовать результаты задачи 1.

3. Поискать эти слагаемые, используя результаты задачи 1.

4–5. Аккуратно перемножить и сравнить.

6. Взять $X = {}^t e_k$, $k \in \overline{1, n}$.

8. Использовать следующие факты:

а) каждую квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к диагональному виду;

б) всякое элементарное преобразование можно реализовать умножением на соответствующую матрицу элементарных преобразований (элементарную матрицу).

9. Как находится обратная матрица?

10. Как связаны между собой строки такой матрицы?

13. Поработать с данными равенствами.

15. Использовать матрицы элементарных преобразований.

16. Использовать равенство ${}^t A = -A$.

17. Использовать связь ранга матрицы с порядком ненулевых миноров.

18. Использовать разложение определителя по элементам строки или столбца и похожее свойства определите-

ля.
19. Использовать свойства определителя произведения матриц и определителя транспонированной матрицы.
20. Использовать теорему об определителе произведения матриц и задачу 17.
21. Показать невозможность других случаев.
26. Воспользоваться теоремой об определителе произведения матриц.
28. Нельзя ли здесь применить теорию геометрических преобразований?
32. Использовать связь корней из произвольного комплексного числа и корней из единицы, а также свойства первообразных корней.
33. Использовать условие равенства комплексных чисел в тригонометрической форме.
35. Каков модуль правой части равенства?
36. Обозначить $z + 3 - 2i$ через w.

§ 3

4. Использовать теорему Лагранжа и теорему о подгруппах циклической группы.
7. Рассмотреть две возможности:
   а) группа содержит элемент бесконечного порядка;
   б) все элементы группы имеют конечный порядок.
8. Написать одну подстановку под другой.
9. Поделить с остатком k на n.
10. Пусть $n = |H|$, $a \in H$. Показать, что $a^n = 1$.
11. Рассмотреть две возможности: 1) $0 \in S$ и 2) $0 \in S$. В первом случае показать, что $S \setminus \{0\}$ – группа (если это множество ^{1} $\varnothing$).
12. Каков наименьший по абсолютной величине элемент H?
15. Пусть $a \in H_1 \cap H_2$. Каков порядок a (использовать задачу 9 и указание к задаче 10)?
17. Сравнить с задачей 2.26.
19. Воспользовавшись изоморфизмом, свести задачу к группе $\langle \sqrt[n]{1}\,; \cdot \rangle$. Все элементы $z \in H$ обладают свойством $z^n = 1$.
20–21. Использовать задачу 9.
22. б) Методом от противного.
23. Использовать теорему об эпиморфизмах.
24. б) Указать такую подгруппу. Показать, что любой элемент $\overline{a} \in \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$, обладающий свойством $na \in \boldsymbol{Z}$, совпадает с одним из элементов этой указанной подгруппы.
25. Каков порядок этой группы?
26. Заменить равенство $ab = ba$ равносильным и воспользоваться критерием нормальной подгруппы.
27. Показать, что H подгруппа индекса 2.
28. Использовать теорему об эпиморфизмах и теорему Лагранжа.
30. Смотреть указание к задаче 28. Сколько элементов должно бы содержать ядро такого эпиморфизм?
32. Не встречалась ли уже такая задача?
33. а) Воспользоваться теоремой Лагранжа.
    б) Такой гомоморфизм только один. Какой?
34. Связать ответ со свойствами натуральных кратных элементов.
35. Использовать задачу 19 и теорему о гомоморфных образах циклической группы.
36. Использовать теорему о подгруппах группы $\langle \boldsymbol{Z}; + \rangle$.
39. Рассмотреть в качестве H класс эквивалентности K_e, порожденный нейтральным элементом e.

§ 4

2. Найти пересечение подпространств и размерность пересечения.
4. б) Использовать задачу 1.8.
5. а) Сравнить размерность подпространств U_1+U_2, U_1, U_2 и $U_1 \cap U_2$.
6. а) Найти пересечение U и W и использовать величины размерностей этих подпространств.
8. Использовать свойство ступенчатых систем векторов.
11. Использовать свойства размерностей подпространств.
12. Доказать методом от противного.
15. Показать, что $x - y \in V^{\perp}$.

18. Использовать равенство $U = (U^{\perp})^{\perp}$.
19. д) Применить свойство г) для $U_1^{\perp}$ и $U_2^{\perp}$.
24. Отметим, что $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ и $\{c_1, c_2, \ldots c_k\}$ — ортогональные базисы подпространства $L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Утверждение доказывается индукцией по k.
25. Связать с решениями системы линейных однородных уравнений.

§ 5

1. Подействовать на базисные векторы i, j, k.
4. Связать с матрицами линейных отображений.
5. Какова размерность векторного пространства (использовать задачу 3 б))?
6. Использовать задачу 3 б).
8. Показать, что данное утверждение равносильно следующему: φ переводит базис в базис.
9. Доказать, что φ сюръекция и использовать задачу 3 б).
10. Использовать задачу 8.
12. Использовать равенство $x = \varphi(x) + (x - \varphi(x))$.
13–14. Использовать теорему об описании линейных отображений через образы векторов базиса.
15. Определить размерности $Ker\ \varphi$ и $Ker\ \psi$. Дополнить базис $Ker\ \varphi$ до базиса V.
16. Проверить, что ненулевая линейная комбинация собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям, уже не является собственным вектором.
17. Учесть равенство $|\lambda^2 E - A^2| = |\lambda E - A||\lambda E + A|$.
20. Воспользоваться свойством определителя транспонированной матрицы.
21. Использовать задачу 20 и доказать равенство $|\lambda E - A^{-1}| = |A^{-1}|\lambda^n|A - 1/\lambda E|$.
22. Положить для определенности, что A невырожденная матрица.
24. Использовать изоморфизм каждого из этих пространств с соответствующим пространством матриц.
25. Использовать задачу 24.
26. Вспомнить формулу связи координат вектора и координат образа этого вектора.

§ 6

5. а) Вычислить $(a+b)^2$.
   б) Аналогичен а).
7. Использовать задачу 2.8.
11. Использовать равенство $x^{p-1} - 1 = (x^{(p-1)/2} - 1)(x^{(p+1)/2} + 1)$ и тот факт, что многочлен над полем имеет корней не больше, чем его степень.
20. Рассмотреть множество степеней этого ненулевого элемента.
21. Укажем, что в $\boldsymbol{Z}_{(p)}$, с точностью до ассоциированности, существует только один простой элемент.
22. Использовать теорему об эпиморфизмах колец и задачу 16.
24. а) Так как $\langle \boldsymbol{Z}; +\rangle$ циклическая группа, то всякий гомоморфизм определяется действием на образующий элемент группы.
    б) Чему равен $\varphi(x)$?
25. Воспользоваться теоремой об эпиморфизмах колец.
26. Рассмотреть декартово произведение кольца с единицей и кольца без единицы.
29–30. Рассмотреть уравнение $x^2 = 2$ в каждом из этих колец.
31. Учесть, что всякий автоморфизм кольца на множестве $\boldsymbol{Q}$ действует тождественно (проверьте!).

32. Вспомнить о связи колец главных идеалов и факториальных колец.

§ 7

3. Рассмотреть комбинации суммы остатков от деления a^2 и b^2 на 7.

4. Сравнить любые два таких числа по модулю M.

5. Какие остатки от деления на 4 могут иметь суммы квадратов двух чисел?

6. Какой может быть последняя цифра числа $n(n + 1)/2$?

8. Каков остаток от деления этой суммы на 4?

9. Разложить число 240 на взаимно простые множители и доказать, что выражение делится на каждый из этих множителей.

11. Вспомнить, как доказывалась ‘по Евклиду’ бесконечность множества простых чисел.

14. Использовать свойства функции ‘целая часть числа’.

15. На что делится q?

16. Доказать методом от противного.

17. Воспользоваться определением логарифма.

19. Воспользоваться равенством $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$.

21. Применить признаки делимости.

24. В знаменатель формулы для $\varphi(x)$ входят простые множители только в первой степени, причем наибольшее простое число сократиться с числителем не может (доказать!)

27. Предположив, что p общий простой делитель чисел $(a + b)^n$ и $(a - b)^n$, попытайтесь найти его.

29. Воспользоваться коммутативностью и ассоциативностью (доказать!) операции взятия НОД.

30. Умножить обе части доказываемого равенства на a.

40. Воспользоваться тем, что всякое рациональное число разлагается в цепную дробь единственным образом.

41. Вспомнить формулировку теоремы-критерия для этого случая.

§ 8

2. Умножить и поделить многочлен на x–1.

7. Свести к задаче 6, введя однородные переменные $x_k = y_k/y_{n+1}$.

8. Связать корни делимого и делителя.

14. б) Разложить на множители над $\boldsymbol{R}$.

16. Найти рациональные корни.

19. Рассмотреть многочлен $x^n - 1$.

23. Исключить радикалы.

24. Использовать трансцендентность π.

25. Использовать производную.

29. а) Доказать, что $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

б) Использовать задачу 23.

в) Использовать правую часть равенства.

30. Использовать задачу 29 в). Каковы образы базисных элементов?

32. Использовать каноническое разложение над $\boldsymbol{R}$.

33. 1-й способ: разложить 297 на множители.

2-й способ: произвести группировку множителей.

34. Связать с кратностью корней f.

36. Доказать, что коэффициенты при x и x^3 равны нулю.

Оглавление

Предисловие……. 3

ЧАСТЬ 1. Система индивидуальных заданий……... 4

ЧАСТЬ 2. Система групповых заданий……. 77

ЧАСТЬ 3. Система заданий к семестровым экзаменам…….... 100

§ 1. Системы векторов и системы линейных уравнений…… 100

§ 2. Матрицы и определители. Комплексные числа……... 102

§ 3. Группы……... 105

§ 4. Векторные и евклидовы пространства……... 108

§ 5. Линейные отображения и линейные операторы……... 110

§ 6. Кольца……... 113

§ 7. Задачи по теории чисел……... 115

§ 8. Алгебра многочленов……... 118

Указания…… 120

Учебно-методическое издание

Моисеев Сергей Алексеевич
Суворов Николай Михайлович

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Редактор В.Л. Рубайлова
Технический редактор О.С. Верещагина

Подписано в печать 18.09.06. Поз. № 064. Бумага офсетная. Формат 60x84$^{1}/_{16}$.
Гарнитура Times New Roman. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 7,9. Тираж 500 экз. Заказ №

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46

Редакционно-издательский центр РГУ
390023, г. Рязань, ул. Урицкого, 22