ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ С.А. ЕСЕНИНА»

**И З В Е С Т И Я**
**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК**

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Научный журнал*

**12 · 2007**

Издается с 1998 года

Рязань 2007

**Адрес редакции:**
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46
Рязанский государственный университет

**Телефоны:**
(4 912) 45-20-36
(4 912) 28-05-88

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
2007 Дифференциальные уравнения № 12

**НИКОЛАЙ ВИКТОРОВИЧ АЗБЕЛЕВ**
(1922–2006)

15 апреля 2007 года исполнилось бы 85 лет Николаю Викторовичу Азбелеву, доктору физико-математических наук, профессору, члену редколлегии научного журнала «Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения».

Моя первая встреча с заведующим кафедрой математики Тамбовского института химического машиностроения (ТИХМ) произошла в конце 60-х годов XX века. Николай Викторович приехал в город Рязань вместе с женой – тогда еще доцентом Линой Фазыловной Рахматуллиной по приглашению профессора Иринарха Петровича Макарова, чтобы принять участие в работе межвузовской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений.

Рязанские математики уже с середины пятидесятых годов хорошо знали ученого Н.В. Азбелева.

Были установлены связи научных школ, возглавляемых сначала профессором И.П. Макаровым, а затем профессором М.Т. Терёхиным и профессором Н.В. Азбелевым, которые с годами развивались, расширялись, укреплялись и поддерживаются до настоящего времени.

Имя Николая Викторовича Азбелева относится к когорте ученых не только Российской математики, его научные труды знают и во многих странах мира.

Николай Викторович родился 15 апреля 1922 года в селе Базлово Великолукского района Псковской области. Интерес к науке и технике у Н.В. Азбелева проявился еще в детском возрасте. Здесь он следует семейным традициям.

Родители – люди образованные, воспитанные, ученые [1].

Папа – Виктор Николаевич Азбелев – в 1905 году окончил Военно-медицинскую академию в Петербурге, а в 1912 году в Берлинском институте слушал курсы Роберта Коха по микробиологии. Виктор Николаевич был военным врачом на Дальнем Востоке, а потом – во время Первой мировой войны – в армии Самсонова, затем директором Полярного института бактериологии в Архангельске, профессором. После убийства С.М. Кирова по стране прокатилась волна репрессий. Не обошла она и ученого. Вместе с семьей В.Н. Азбелев был сослан в Томск.

Мама Н.В. Азбелева – Антонина Федоровна Хлебникова – в 1916 году окончила высшие женские курсы в Петербурге. Она была ученицей и сотрудницей известного ботаника В.Л. Комарова, который впоследствии стал президентом АН СССР.

Дедушка Николая Викторовича – адмирал Николай Петрович Азбелев – ученый, был преподавателем в Военно-морской академии, являлся членом-учредителем Русского астрономического общества, а прабабушка – Анна Михайловна Жемчужникова – сестра известного поэта А.М. Жемчужникова. Жемчужниковы – тамбовские дворяне – создали и прославили в русской литературе имя писателя, который оставил после себя «немало открытий, озарений и наставлений будущим поколениям…»

В 1941 году Николай Викторович поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета. В Великую Отечественную войну в 1943 году с третьего курса он был призван в действующую армию. В 1944 году после контузии снова вернулся в университет, а в 1945-ом году он еще поступил на моторостроительный факультет Московского авиационного института на заочное обучение. Получил диплом инженера-механика в МАИ в 1949 году. В 1947–1949 годах он работал конструктором в конструкторском бюро А.А. Микулина, в котором прошел хорошую школу и решил ряд актуальных технических задач путем математических расчетов, предложил оригинальный метод расчета на прочность радиально-упорного шарикоподшипника «многоточечного касания». Николай Викторович одним из первых в 1947 году применил метод электрических аналогий к расчету динамики турбин. Это Н.В. Азбелев сконструировал вычислительную машину для расчета собственных частот колебаний валов реактивных двигателей. С 1951 по 1954 год в аспирантуре при кафедре математики Московского станкоинструментального института занимался решением проблемы Чаплыгина-Лузина о границах применимости теоремы о дифференциальном неравенстве под научным руководством профессора Б.И. Сегала. После успешной защиты в Московском университете кандидатской диссертации в 1954 году был направлен в только что открывшийся Ижевский механический институт, в котором заведовал кафедрой математики до 1966 года. В Казанском университете в 1962 году Н.В. Азбелев защитил диссертацию о дифференциальном неравенстве на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а уже в 1964 году стал профессором. В 1966 году он был избран на должность заведующего кафедрой математики Тамбовского института химического машиностроения. В город Тамбов, с которым в их династии так много было связано, он переехал вместе с женой Линой Фазыловной Рахматуллиной – доцентом кафедры высшей математики Ижевского механического института и группой учеников. Здесь, в ТИХМ, он создал научно-исследо-вательский семинар, который занимался изучением теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и краевых задач. Позже на основе этой теории возникает теория функционально-дифференциальных уравнений. В это время устанавливаются тесные научные связи между семинарами, возглавляемыми профессорами И.П. Макаровым и Н.В. Азбелевым.

Руководители обмениваются не только научными трудами, но и докладчиками.

Рязанские математики выступают на семинаре у Николая Викторовича в Тамбове, а его ученики участвуют в работе научного семинара при кафедре математического анализа Рязанского педагогического института (теперь Рязанского государственного университета) и научных конференций, которые уже стали международными.

Работая в Тамбове, беспартийный Николай Викторович вел большую общественную работу: был депутатом горсовета, председателем Областного комитета защиты мира, принимал участие во Всемирном конгрессе миролюбивых сил, проводившемся в Москве.

В 1975 году он соглашается на приглашение ректора Пермского политехнического института (теперь технический университет) профессора М.Н. Дедюкина и с 1975 года руководит организованной им кафедрой математического анализа. И вновь за ними последовала вся его команда, даже некоторые тамбовские студенты и ученики.

Супруги Азбелев–Рахматуллина много занимались математической деятельностью и в средней школе, отобрав наиболее способных и подающих надежду в математических исследованиях школьников.

Для работы вузе в Пермь приехали и специалисты высшей квалификации, и студенты и школьники – для дальнейшего обучения в Пермском политехе. Обучение было успешным, так как соединились инженерная подготовка и углубленное изучение математики.

Создатель научного семинара в Тамбове Н.В. Азбелев и здесь в Перми возрождает свое детище – теперь уже Пермский семинар, на базе которого возник исследовательский центр по современной теории функционально-дифференциальных уравнений, сотрудниками которого (на общественных началах) были аспиранты, докторанты и стажеры математических кафедр вузов города. Семинар стал всесоюзным центром исследований, издавал ежегодный сборник научных трудов «Краевые задачи» и «Функционально-дифференциальные уравнения». На базе кафедры каждый год в дни зимних каникул проходили научные конференции, ставшие всесоюзными. В этих конференциях принимали участие и рязанцы. Аспиранткой-заочницей ЛГУ в 1980 году я побывала на одной из таких конференций. Большую группу рязанских математиков с кафедры математического анализа пединститута приняли очень радушно. В студгородке Пермского политехнического института, который располагался в красивейшем местечке, в лесу, были учебные корпуса, корпуса общежитий находились от учебных на расстоянии одной остановки, когда весной, летом и осенью лучше пройтись пешком по лесу, а зимой в лесу не менее красиво, даже очень заманчиво пройтись по зимней тропочке. Многие из рязанцев в свободное время ходили на лыжах. Здесь же, напротив здания общежития, через дорогу – столовая…

Были мы в прославленном театре оперы и балета.

А еще нас, гостей конференции, возили на экскурсию в Кунгуры, где знаменитая ледяная пещера. Впечатлений очень много!

Талантливый ученый Николай Викторович Азбелев с женой Линой Фазыловной вели аскетичный образ жизни. Они жили в отдельном доме в сосновом бору за Камой. Семейная чета погрузилась полностью в науку, в математические исследования, в доме у ученых не было даже телевизора, чтобы не отвлекал от серьезных занятий.

«Занимаясь математикой всю жизнь, я не могу сказать, что знаю ее», – сетовал Азбелев, приводя любимый афоризм своего великого «прадеда»: «Никто не обнимет необъятного…» [2].

У Николая Викторовича и Лины Фазыловны была абсолютная и взаимная любовь к математике, единый процесс сотворчества.

Опубликованная в 1991 году монография «Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина «Введение в теорию функциональных дифференциальных уравнений» стала так называемой «классикой» математической литературы, в которой изложены основы теории широкого класса уравнений, с их помощью моделируются проблемы современной физики, экономики и других наук. Научный уровень монографии велик, так как в ней обобщены результаты пяти докторских диссертаций, которые были выполнены на кафедре.

Вот что сказал ученый в своем заявлении перед поездкой в США на Первый международный конгресс нелинейных аналитиков: «Исследования кафедры, вошедшие в монографию, относятся к весьма абстрактным областям фундаментальных наук и следовательно сиюминутного «экономического эффекта» не сулят. Я никому не могу пообещать прибылей от моей поездки в Штаты, хотя не сомневаюсь, что математические исследования после этой поездки получат необходимую поддержку и поднимутся на новый уровень… Сам я, как вы знаете, являюсь кабинетным ученым. Не имею никаких связей в соответствующих областях, не имею опыта по организации финансовых вопросов» [2].

За последние десять с лишним лет пять монографий, 20 научных статей профессора Азбелева опубликованы не только в местной и центральной, но и в зарубежной печати. Ученый выступил с сообщениями на 18 международных научных конгрессах, симпозиумах и совещаниях – от Германии и Греции до Турции и Португалии… А на Всероссийских совещаниях и семинарах он сделал более 50 докладов.

В соавторстве с П.М. Симоновым выходит в свет еще одна монография «Устойчивость решения уравнений с обыкновенными производными», которая в 2002 году была переведена на английский язык.

В Лондоне вышла в свет монография «Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения».

Велика роль школы Азбелева в подготовке специалистов технического университета, которая перешла на новый уровень не только в области математики, но и в других направлениях. Это они, специалисты высшей квалификации, определяют в вузе уровень университетского образования, формируют среду для творчества, служат высоким целям, привлекая к их достижениям молодежь.

В Перми под руководством Николая Викторовича было подготовлено более десятка докторских и свыше 50 кандидатских диссертаций.

Велик авторитет Н.В. Азбелева в научном мире. Он – один из основоположников теории интегральных и дифференциальных неравенств, создатель современной теории функционально-дифференциальных уравнений.

В 1968–1991 годах Николай Викторович был членом редколлегии всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения». Являлся членом редколлегии журнала «Functional Differential Equations», издаваемого в Израиле, международных журналов «Nonlinear Dynamics and Systems Theory» и «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», а также нашего научного журнала «Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения».

Научное творчество ученого и высокие деловые качества руководителя научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения» при Пермском государственном техническом университете были по достоинству оценены: доктор физико-математических наук, профессор Н.В. Азбелев – заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, заслуженный соросовский профессор, лауреат Государственной научной стипендии Президиума Российской академии наук, почетный академик Академии нелинейных наук, почетный профессор Ижевского госуниверситета.

Николай Викторович Азбелев скончался 3 ноября 2006 года.

На долгие годы сохранится светлая память о знаменитом ученом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Абдуллаев, А.Р.* Н.В. Азбелев – глава школы по современной теории функционально-дифференциальных уравнений / А.Р. Абдуллаев, Д.Л. Андрианов, А.А. Бартоломей [и др.] // Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск). – Пермь; ПГТУ, 2002. – С. 3–5.
2. *Журавлев, С.* Имя в науке: Николай Викторович Азбелев / С. Журавлев // Звезда. – 2003. – 22 августа.


**З.С. Свирина**

## СПИСОК НЕКОТОРЫХ НАУЧНЫХ РАБОТ Н.В. АЗБЕЛЕВА

(работы, опубликованные до 1997 года, приведены в журнале «Дифференциальные уравнения». – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 727–730; – 1997. – Т. 33. – №4. – С. 437–439; работы, опубликованные до 2002 года, приведены в Вестнике Пермского государственного технического университета «Функционально-дифференциальные уравнения»: специальный выпуск 2002 г. – С. 6–7)

2002

156. К вопросу о минимизации возмущения квадратичного функционала (соавторы Е.И. Бравый, С.А. Гусаренко) // Вестник ПГТУ. Функционально-дифферен-циальные уравнения. Спец. вып. – 2002. – С. 47–51.

157. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационное исчисление // Нелинейный динамический анализ: 2 Международный конгресс, Москва, 3–8 июня, – 2002. М.; МАИ, 2002. – С. 171.

158. Как это было: Исторический очерк возникновения и развития теории ФДУ// Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения. Спец. вып. – 2002. – С. 13–40.

159. Функционально-дифференциальные уравнения и теория устойчивости уравнений с последействием (соавтор П.М. Симонов)// Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения. Спец. вып. – 2002. – С. 52–69.

2003

160. О минимуме функционалов в специальных пространствах // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: 2 Международная конференция, посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева, Москва, 24–28 марта, 2003: Тезисы докладов. – М.: Физматлит. – 2003. – С. 18.

161. Современная теория устойчивости уравнений с последействием: обзор идей и результатов / соавт. П.М. Симонов // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит. – 2003. – С. 289–304.

162. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационное исчисление // Вестник Тамбовского ун-та. – 2003. – 8. – № 3. – С. 338. (Сер.

естественные и технические науки).

2004

163. Вариационный метод решения задачи Эйлера об устойчивости упругого стержня / соавт. М.А. Макагонова, В.П. Плаксина // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2004. – № 8. – С. 10–13.

## **Н Е К Р О Л О Г**

**БЕРКОВИЧ ЛЕВ МЕЙЛИХОВИЧ**

Не стало доктора физико-математических наук, профессора, члена редколлегии научного журнала «Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения» Льва Мейлиховича Берковича. Он скончался 14 марта 2007 года, до конца своей жизни проработав на кафедре алгебры и геометрии Самарского государственного университета.

Родился Лев Мейлихович 22 сентября 1935 года в городе Куйбышеве (ныне Самара).

Высшее образование получил, окончив в 1958 году Казанский государственный университет имени В.И. Ульянова-Ленина.

Трудовую деятельность молодой математик начал с работы в средней школе станции Бердяуш Южно-Уральской железной дороги.

Еще студентом проявил склонность к научным исследованиям.

В 1957 году в Ученых записках Казанского университета опубликована его первая научная статья «О круговых луночках, квадрируемых при помощи конических сечений».

В 1967 году ему была присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук по специальности «дифференциальные уравнения», а уже через два года присвоено ученое звание доцента.

Область его научных интересов привлекает внимание не только ученых-математиков, но и студентов. Это дифференциальная алгебра, групповой анализ дифференциальных уравнений, нестационарные задачи небесной механики, регулярные и хаотические динамические системы, нелинейные эволюционные уравнения, системы компьютерной алгебры.

Л.М. Берковичем получены следующие основные результаты. Им впервые применен метод факторизации линейных дифференциальных операторов совместно с методом преобразования переменных, что позволило эффективно проводить исследования дифференциальных уравнений на интегрируемость в конечном виде, впервые метод факторизации перенесен на линейные дифференциальные уравнения и на этой основе развиты методы автономизации и точной линеаризации.

Львом Мейлиховичем решены классическая задача французского математика G.-H. Halphen`a об инвариантах и классификации линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка и классическая задача нестационарной небесной механики, поставленная еще в конце XIX столетия шведским астрономом Gylden'ом и российским механиком И.В. Мещерским; построены новые классы нелинейных эволюционных уравнений высшего порядка.

Л.М. Беркович являлся членом Московского математического общества, членом Американского математического общества, членом Международной Федерации нелинейных аналитиков, действительным членом Академии нелинейных наук.

Исследования, проведенные им в последнее время, относятся к развитию нелинейного анализа дифференциальных уравнений и его приложениям.

В 2004 году ему присуждена ученая степень доктора физико-математических наук.

Лев Мейлихович Беркович опубликовал большое количество научных работ и активно участвовал в издательской деятельности. Он был референтом журналов «Математика» (ВИНИТИ РАН), «Mathematical Rews» (AMS), членом редколлегий журналов: «Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения», «Publications of the faculty of electrical engineering, University of Belgrad» (serie mathematics).

Математики-рязанцы знают Л.М. Берковича по совместной работе с 1969 года, когда в Рязани впервые была проведена конференция по качественной теории дифференциальных уравнений и сборники научных трудов «Дифференциальные уравнения».

Светлую память о нашем коллеге, удивительно интеллигентном и общительном человеке мы сохраним на долгие годы.

**И.М. Буркин, Е.В. Воскресенский, В.В. Лебедев,**
**Ю.В. Малышев, Н.Х. Розов, М.Т Терёхин, В.Н. Щенников**

УДК 517.925+517.958

**В.В. Абрамов**

# КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

Предложена модификация модели Солоу. Получены условия согласованности внешнего регулирования с естественной стабилизацией системы в положении равновесия.

Для качественного описания динамики односекторной экономики часто используется модель Солоу [1]. Предполагается, что изменения в размере инвестиций мгновенно отражаются на величине фондов (это может быть допустимо, если реальное запаздывание пренебрежимо мало по сравнению с рассматриваемым периодом времени); валовой общественный продукт или потребляется, или инвестируется (в этом смысле экономика изолирована).

При этих же предположениях в данной работе будем учитывать влияние потребления на динамику числа занятых, в отличие от традиционного подхода, когда число занятых изменяется экспоненциально.

Рассмотрим модель изменения состояния односекторной экономики:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + \lambda F(K,L) = P(K,L), \\ \dot{L} = \nu L + ag(K,L) = Q(K,L), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $K$ – фонды, $L$ – число занятых; $\mu \in (0,1)$ – доля выбывших за единицу времени фондов, $\lambda \in (0,1)$ – норма накопления; $F(K,L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ – производственная функция, $A$ – коэффициент нейтрального технического прогресса; $\alpha_1, \alpha_2$ – коэффициенты эластичности по фондам и труду, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$; $\nu$ – коэффициент естественного прироста числа занятых.

Слагаемое $ag(K,L)$, где $g(K,L) = ((1-\lambda)F(K,L))^s$, $s > 0$, позволяет учитывать влияние потребления $(1-\lambda)F$ на динамику числа занятых. Случай $a > 0$ имеет место, если уровень потребления является привлекательным для трудоспособного населения: есть приток рабочей силы извне или наблюдается повышение эффективности труда. Случай $a < 0$ имеет место, если уровень потребления не является привлекательным для труда: есть отток рабочей силы в страны с высоким уровнем заработных плат или наблюдается снижение производительности труда, или если из-за высоких социальных гарантий растет число безработных.

Кроме того, экономика может быть подвержена внешним влияниям, которые будем рассматривать как регулирование экономики (например, государственное).

Рассмотрим случай, когда параметры экономики удовлетворяют условиям:

$$\nu < 0,\ a > 0,\ 1 - s\alpha_2 > \alpha_1. \tag{2}$$

Выясним наличие у системы (1) положений равновесия, оценим их «привлекательность» для экономики и определим условия, при которых внешнее регулирование не влияет на стабилизацию экономики в положении равновесия.

Из условий (2) следует, что $\alpha_1 + s\alpha_2 - 1 \neq 0$. При этом система (1) имеет единственное ненулевое положение равновесия:

$$K_0 = \left( \frac{-\nu}{a(1-\lambda)^s A^s} \left( \frac{\lambda A}{\mu} \right)^{\frac{s\alpha_1 - 1}{\alpha_2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + s\alpha_2 - 1}}, \quad L_0 = \left( \frac{\mu}{\lambda A} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} K_0^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}{\alpha_2}}. \tag{3}$$

Ясно, что положения равновесия, представляющие практический интерес для экономики, должны быть реализуемыми, что возможно лишь при их асимптотической устойчивости, а также продуктивными, то есть в этих состояниях производственная функция должна иметь ненулевые значения.

Стабилизация экономики в стационарном состоянии может быть первым этапом перестройки производственного уклада (с формальной точки зрения это связано со статистической верификацией вида производственной функции), при которой изменяется и модель экономики, поэтому достижение стационарного состояния может быть целесообразным промежуточным этапом развития экономики.

**Замечание.** Практическое достижение малой окрестности реализуемого стационарного режима $(K_0, L_0)$ возможно в достаточно короткий срок, если ее текущее состояние $(K, L)$ достаточно близко к $(K_0, L_0)$, поэтому для проверки состояния (3) на устойчивость достаточно применить признаки устойчивости по линейному приближению.

Заметим, что при условии $1 - s\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ (например, если выполняется условие Кобба-Дугласа и $s = 1$) положения равновесия могут заполнять сплошь кривую, примыкающую к нулевому положению равновесия.

Для исследования положения равновесия $(K_0, L_0)$ на устойчивость вычислим матрицу $D = (d_{ij})$ коэффициентов соответствующей системы в вариациях. Так как в положении равновесия (3): $\frac{F(K_0, L_0)}{K_0} = \frac{\mu}{\lambda}$, $ag(K_0, L_0) = -\nu L_0$, то

$$D = \begin{bmatrix} P'_K(K_0, L_0) & P'_L(K_0, L_0) \\ Q'_K(K_0, L_0) & Q'_L(K_0, L_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu + \lambda\alpha_1 \dfrac{F(K_0, L_0)}{K_0} & \lambda\alpha_2 \dfrac{F(K_0, L_0)}{L_0} \\ as\alpha_1 \dfrac{g(K_0, L_0)}{K_0} & \nu + as\alpha_2 \dfrac{g(K_0, L_0)}{L_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu(\alpha_1 - 1) & \mu\alpha_2 \dfrac{K_0}{L_0} \\ -s\alpha_1\nu \dfrac{L_0}{K_0} & \nu(1 - s\alpha_2) \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу условий (2): $trD = \mu(\alpha_1 - 1) + \nu(1 - s\alpha_2) < 0$, $\det D =$ $= \mu\nu(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1) > 0$. При этом $(K_0, L_0)$ – асимптотически устойчивое положение равновесия по линейному приближению [2].

**Утверждение 1**. Модель (1) при условиях (2) обладает единственным ненулевым асимптотически устойчивым положением равновесия (3), то есть положение равновесия (3) реализуемо и продуктивно для экономики. Характер устойчивости положения равновесия (3) не зависит от параметра $\lambda$, то есть соотношение инвестиций и потребления не влияет на факт стабилизации производства.

Заметим, что при нарушении условий (2) модель может не иметь продуктивных режимов. Например, при $v(\alpha_1 + s\alpha_2 - 1) < 0$ точка (3) – седло. Тогда согласно теории Пуанкаре-Бендиксона [3] система (1) в «естественном» фазовом пространстве $K > 0$, $L > 0$ не имеет циклов, а, значит, модель вида (1) не имеет стабильных продуктивных режимов функционирования.

В зависимости от целей экономического развития «привлекательность» положения равновесия (3) для экономики можно оценить значениями фондовооруженности или уровнем потребления (в среднем на одного занятого в экономике).

Будем предполагать, что корректировке подвержена лишь норма накопления. Тогда при $\lambda_1 = \dfrac{1}{1+s} \in (0,1)$ фондовооруженность $\psi(\lambda) = \dfrac{K_0}{L_0}$ достигает наибольшего значения, а уровень потребления $\varphi(\lambda) = \dfrac{(1-\lambda)F(K_0, L_0)}{L_0}$ достигает наибольшего значения при $\lambda_2 = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1(1-\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1(1-\alpha_1) + \alpha_2(1-\alpha_1)}$; $\lambda_2 \in (0,1)$, если $\alpha_2 > \alpha_1(1-\alpha_1)$.

Если экономика подвержена внешним воздействиям, то вновь возникает вопрос о реализуемости положения равновесия (3).

В силу сделанного выше замечания для проверки чувствительности состояния (3) к внешним воздействиям типа регулирования построим модель

$$\begin{cases} \dot{y} = Dy + b\xi, \\ \dot{\xi} = f(\sigma), \\ \sigma = c^T y - r\xi, \end{cases} \tag{4}$$

в которой $y = (K, L) - (K_0, L_0)$ – возмущение стационарного режима (3), $D$ – матрица коэффициентов системы в вариациях, соответствующей режиму (3), $\xi$ – скалярное регулирующее воздействие, $r > 0$ – коэффициент торможения регулятора, $c^T y$ – восприятие регулятором возмущения режима (3), $\sigma$ – возмущение стационарного состояния системы «экономика-регулятор». Будем предполагать, что характеристика регулятора $f(\sigma)$ удовлетворяет требованиям $f(0) = 0$, $\sigma f(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$, $\int\limits_0^{\pm\infty} f(\sigma)d\sigma = +\infty$, которые естественны для «поддерживающего» регулирования. Кроме того, будем предполагать, что выполнено условие

$$r + c^T D^{-1} b \neq 0. \tag{5}$$

Следуя схеме, изложенной в [4], определим условия абсолютной устойчивости нулевого положения равновесия системы (4). При этом ясно, что положение равновесия (3) исходной модели (1) будет асимптотически устойчиво по линейному приближению независимо от конкретного вида характеристики регулятора $f(\sigma)$, то есть внешнее регулирование не будет препятствовать стабилизации экономики в продуктивном положении равновесия.

В силу условия (5) система (4) допускает замену переменных $\begin{cases} x = Dy + b\xi, \\ \sigma = c^T y - r\xi, \end{cases}$ и преобразуется в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Dx + f(\sigma)b, \\ \dot{\sigma} = c^T x - rf(\sigma). \end{cases} \tag{6}$$

Для определения характера устойчивости нулевого положения равновесия системы (6) применим прямой метод Ляпунова.

Выберем $V(x,\sigma) = x^T Bx + \int_0^{\sigma} f(\tau)d\tau > 0$. Здесь $B = (b_{ij}) > 0$ – симметрическая матрица, подлежащая определению. Для функции $V(x,\sigma)$ производную в силу системы (6) запишем в виде квадратичной формы:

$$\dot{V}(x,\sigma) = \begin{pmatrix} x \\ f(\sigma) \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} x \\ f(\sigma) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$Q = \begin{pmatrix} C & c/2 + Bb \\ (c/2 + Bb)^T & -r \end{pmatrix}$, $C = (c_{ij}) = D^T B + BD$ – симметрическая матрица. Чтобы проверить выполнение условия $\dot{V}(x,\sigma) < 0$, применим к матрице $Q = (q_{ij})$ критерий Сильвестра.

Так как $B > 0$ – симметрическая матрица, то оба ее собственных значения должны быть действительными положительными числами. Допустим, в нормальной форме $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $C = \begin{pmatrix} 2d_{11}b_{11} & d_{12}b_{11} + d_{21}b_{22} \\ d_{12}b_{11} + d_{21}b_{22} & 2d_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Положим $b_{11} = \dfrac{d_{21}}{2}$, $b_{22} = \dfrac{d_{12}}{2}$. При этом в силу условия (2): $B > 0$; $c_{11} < 0$, $c_{22} < 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = d_{12}d_{22}\det D > 0$, то есть $C < 0$; главные миноры матрицы $Q$:

$$\Delta_1 = q_{11} = c_{11} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{22} & q_{22} \end{vmatrix} = \det C > 0,$$

$$\Delta_3 = \det Q = -\det C\left(r + (c/2 + Bb)^T C^{-1}(c/2 + Bb)\right).$$

Значит, $Q < 0$, при $\Delta_3 < 0$, то есть при выполнении условия

$$r + (c/2 + Bb)^T C^{-1}(c/2 + Bb) > 0. \qquad (9)$$

Итак, если выполняется неравенство (9), то $Q < 0$, а, стало быть, $\dot{V}(x,\sigma) < 0$ независимо от вида функции $f(\sigma)$.

**Утверждение 2.** Если выполняются условия (5) и (9), то нулевое положение равновесия системы (4) абсолютно устойчиво, то есть наличие внешнего регулирования с любой характеристикой не влияет на факт стабилизации экономики в продуктивном положении равновесия.

Условие (9) может быть использовано для практического подбора параметров регулятора, то есть для подбора классов «поддерживающих» регуляторов. В частности, для выполнения условий (5) и (9) при заданных векторах $c$ и $b$ следует выбрать достаточно большим коэффициент торможения регулятора $r$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Колемаев, В.А.* Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. *Малкин, И.Г.* Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966.
3. *Андронов, А.А.* Качественная теория динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [ и др.]. – М.: Наука, 1966.
4. *Ла-Салль, Ж.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец. – М.: Мир, 1964.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517.925**



**А.Ф. Андреев**


# К ТЕОРЕМЕ Н.Г. ЧЕТАЕВА О НЕУСТОЙЧИВОСТИ


Предлагается дополнение к теореме Н.Г. Четаева о неустойчивости – ее параллельный, модифицированный вариант. С его учетом расширяется класс функций, которые могут претендовать на роль функции Четаева – в этот класс входят даже линейные функции.


В свое время Н.Г. Четаев [5, 6] доказал весьма общую теорему о неустойчивости по Ляпунову состояния равновесия $O$ системы дифференциальных уравнений. Как и теоремы самого А.М. Ляпунова из его прямого метода, она формулируется в терминах функции $V$ от фазовых переменных (а для неустановившихся движений и от времени $t$) и ее полной производной по $t$ в силу системы $\dot{V}$. Но условия на последнюю налагаются в ней не в полной окрестности $U$ точки покоя $O$, как у Ляпунова, а лишь в некоторой области $G$ ($G \subset U$, $O \in \partial G$), в которой $V > 0$. Однако построение функции $V$, удовлетворяющей условиям теоремы Четаева, тоже непростая задача. В связи с этим возникает идея сформулировать дополнение к теореме Четаева (параллельный ее вариант), в котором условие на $\dot{V}$ налагалось бы не в полной компоненте связности $G$ множества $V$, как в теореме Четаева, а лишь в некотором ее $O$-секторе. Цель этого – расширить класс функций, которые могли бы претендовать на роль функции Четаева. В таком случае в этот класс смогут войти даже линейные функции.

Ниже формулируются теорема Четаева (теорема 1) и дополнение к ней (теорема 2). Мы рассматриваем лишь случай установившихся движений.

**1**. Пусть в области $D \subset \mathrm{R}^n$, $n \geq 2$, задана автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}), \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{X} \in C\ (D)$, $D$ – область единственности для (1), $O(\boldsymbol{0}) \in D$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. Пусть $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ – движение (решение) системы (1), $\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{x}_0)= \boldsymbol{x}_0$.

**Теорема 1 (Н.Г. Четаев)** [3. С. 49]. Пусть для системы (1) существуют область $G$ ($\overline{G} \subset D$, $O \in \partial G$) и функция $V$: $\overline{G} \to \mathrm{R}^n$, $V \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$ такие, что

1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$ в $G$, $V(\boldsymbol{x}) = 0$ на $\partial G$ при $|\boldsymbol{x}| < \Delta$, $\Delta > 0$, $\Delta \in \mathrm{R}$,

2) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) > 0$ в $G$ при $|\boldsymbol{x}| < \Delta$.

Тогда невозмущенное движение $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$ системы (1) неустойчиво.

**Теорема 2.** Пусть для системы (1) существуют замкнутый $O$-сектор $S \subset D$ (гомеоморфный $n$-мерному шару, при $n = 2$ – кругу) с вершиной $O$, боковой границей $\Gamma$ и задней стенкой $\Sigma$ и функция $V$: $S \to \mathrm{R}$, $V \in C(S) \cap C^1(\overset{\circ}{S})$ $(G)$, $\overset{\circ}{S} = \operatorname{int} S$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $V(O) = 0$; в $S \setminus \{O\}$ $0 < V(\boldsymbol{x}) \leq H < +\infty$; $\forall c \in (0,H]$ множество $V_c :=$ $\{\boldsymbol{x} \in S$, $V(\boldsymbol{x}) = c\}$ есть $(n\text{-}1)$-мерный топологический диск (при $n$=2 – дуга) – поперечное сечение (слой) сектора $S$; $V_H = \Sigma$;

2) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$ в $\overset{\circ}{S}$;

3) боковая граница $\Gamma$ сектора $S$ обобщенно бесконтактна для системы (1): движения последней $\boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma|_{(0,H)}$, при возрастании $t$ переходят через $\Gamma$ либо *а*) все снаружи внутрь $S$, либо *б*) все изнутри наружу.

Тогда состояние равновесия $O$-системы неустойчиво.

**Доказательство. А.** Пусть $S$ и $V$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3*а*) теоремы. Рассмотрим сечения (слои) $V_h$ и $V_c$ сектора $S$, где $h \in (0, H]$ – фиксированное число, а $c\in(0,h)$ – произвольное. Пусть $\boldsymbol{x}_0\in V_c$. Тогда движение системы (1) $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ с возрастанием $t$ от нуля входит в компакт $S_{[c,h]}:=\bigcup V_{c'},\ c'\in[c,h]$, и идет там в направлении возрастания $V$. Покажем, что оно пересекает все слои $V_{c'}$, $c'\in[c,h]$. Допустим противное. Пусть $V_{c_1}$ – первый из этих слоев, который $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ не может пересечь. Тогда [4] $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ продолжимо в $S_{[c,h]}$ на все $t\geq 0$ и имеет там непустое $\omega$ -предельное множество $\Omega\subset V_{c_1}$, что в силу условий 2) и 3*а*) невозможно. Следовательно, существует $t_0>0$: $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)\in V_h$, что и означает неустойчивость точки по- коя $O$ системы (1), ибо точка $\boldsymbol{x}_0$ может быть как угодно близка к $O$, а dist $(O,V_h)=d_h>0$ – фиксированное число.

**Б.** Пусть $S$ и $V$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3*б*) теоремы. Рассмотрим те же, что и п. **А,** слои $V_h$ и $V_c$ сектора $S$. Пусть $\boldsymbol{x}_h\in V_h$. Тогда движение системы (1) $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_h)$ с убыванием $t$ от нуля входит в компакт $S_{[c,h]}$ и пересекает все его слои от $V_h$ до $V_c$ включительно. Пусть $t>0$ таково, что $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(-t_0, \boldsymbol{x}_h)\in V_c$. Тогда [4] $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)\equiv\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(-t_0, \boldsymbol{x}_h))\equiv\boldsymbol{x}(t-t_0, \boldsymbol{x}_h))$, следовательно, $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_h$, что и означает неустойчивость точки покоя $O$ системы (1) в случае **Б**. Теорема доказана.

**Пример**. Рассмотрим систему вида (1) на плоскости $R^2$

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=4x^3-2xy. \tag{2}$$

Покажем, что для нее точка покоя $O(0,0)$ неустойчива. Для этого применим к ней теорему 2. Возьмем следующие $O$-сектор $S$ и функцию $V$

$$S:0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq 2x^2,\quad V(x,y)\equiv x. \tag{3}$$

Для них

1) $V(O)=0;$ в $S\setminus\{O\}$ $0<V(x,y)\leq 1;$ $\forall\, c\in(0,1]$ отрезок $V_c: x=c$, $0\leq y\leq 2c^2$ есть поперечное сечение (слой) сектора $S$;

2) $\dot{V}(x,y)=y>0$ в $\overset{\circ}{S}$;

3) через боковые границы $S: y=0$ и $y=2x^2,\quad 0<x<1$ движения системы (2) с возрастанием $t$ входят в $S$. Таким образом, для системы (2) при $S$ и $V$ из (3) выполняются условия 1), 2) и 3*а*) теоремы 2, а потому для нее точка покоя $O$ неустойчива. Это подтверждает и следующий факт: кривая $y=x^2,\quad x>0,$ – траектория системы (2), на которой $\dot{x}=x^2>0.$

**2**. Если в теореме 2 заменить условие 2) на (строгое же) противоположное, то сектор $S$ окажется для системы (1) аналогом нормального сектора (нормальной области) Фроммера 1-го или 2-го типа [1, 2, 4]. И хотя вопрос о том, имеет ли система исключительные направления, примыкающие к точке $O$ из сектора $S$, остается при этом открытым, поведение траекторий системы (1) в $S$, как показывает следующая теорема 3, топологически эквивалентно таковому в $N$-секторе

Фроммера соответствующего типа.

**Теорема 3.** Пусть для системы (1) существуют $O$-сектор $S$ и функция $V$ с теми же общими свойствами, что и в теореме 2, удовлетворяющие следующим условиям: 1) и 3) те же, что и в теореме 2, 2) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}$ в $\overset{\circ}{S}$. Тогда для нее справедливы следующие утверждения.

**А.** При условиях 1), 2), 3*а*) $\forall\ h \in (0,H]$, $\boldsymbol{x}_0 \in S_{(0,h]}$ движение системы (1) обладает свойствами:

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0) \in S_{(0,h]},\ t \geq 0,\quad \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0) \to O \text{ при } t \to +\infty\ , \tag{4}$$

то есть точка $O$ асимптотически устойчива относительно возмущений $\boldsymbol{x}_0$ из $S$.

**Б.** При условиях 1), 2), 3*б*) $\forall\ h \in (0,H]\ \exists\ w_h \subset V_h^o$ (множество $w_h \neq$ Ø и замкнуто): $\forall\ \boldsymbol{x}_0 \in w_h$ движение $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ системы (1) обладает свойствами (4), а $\forall\ \boldsymbol{x}_0 \in V_h \setminus w_h$ $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ с возрастанием $t$ покидает $S_{(0,h]}$ через $\Gamma$ .

**Доказательство. А.** Пусть $h \in (0,H]$, $\boldsymbol{x}_0 \in V_h$. Тогда движение системы (1) $\boldsymbol{x}(t\ ,\boldsymbol{x}_0)$ с возрастанием $t$ от 0 входит в сектор $S_{(0,h]}$, идет в нем в сторону убывания $V$ и пересекает все слои $V_c$, $c \in (0, h]$, сектора $S$. Следовательно, $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ обладает свойствами (4).

**Б.** Пусть $h \in (0,H]$ – произвольно фиксированное число, $c \in (0,h)$ – любое, $V_h$ и $V_c$ – соответствующие слои сектора $S$, $\Gamma_c = \Gamma \bigcap V_c$. Тогда [4] движения системы (1) $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma_c$, с убыванием $t$ от нуля входят в сектор $S_{[c,h]}$, идут там в сторону возрастания $V$ и достигают слоя $V_h$, образуя при этом локально инвариантную трубку системы (1) $U_c \subset S_{[c,h]}$, $U_c \setminus \Gamma_c \subset \overset{\circ}{S}$ с начальным сечением $\gamma_c = \Gamma_c$ и конечным сечением $\gamma_{c,h}$. Пусть $w_{c,h}\ (\subset \overset{\circ}{V}_h)$ – область, ограниченная поверхностью (контуром) $\gamma_{c,h}$, $w_h = \bigcap_{c \in (0,h)} w_{c,h}$. Очевидно, что $w_h\ (\subset \overset{\circ}{V}_h) \neq$ Ø и замкнуто. Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in w_h$. Тогда движение $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ системы (1) обладает свойствами (4). Если же $\boldsymbol{x}_0 \in V_h \setminus w_h$, то движение $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ с возрастанием $t$ от нуля идет по одной из трубок $U_c$, $c \in (0,h)$ и, следовательно, в некоторый момент $t_0 > 0$ покидает $S_{(0,h]}$. Теорема доказана.

**Замечание.** Исследование вопроса о единственности $O$-кривой системы (1) в $S$ в случае **Б** требует дополнительной информации о системе (см. [2]).

**Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ-4609.2006.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01079).**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев, А.Ф.* Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений: учебное пособие. − СПб.; С.-Петербург. ун-т, 2003.
2. *Бодунов, Н.А.* Признаки единственности *O*-кривой для $N_2$ в $R^n$ // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10. – № 8. – С.1366–1374.
3. *Малкин, И.Г.* Теория устойчивости движения. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1952.
4. *Немыцкий, В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949.
5. *Четаев, Н.Г.* Одна теорема о неустойчивости // ДАН СССР. – 1934. – Т. 1. – № 9.
6. *Четаев, Н.Г.* Устойчивость движения. – М. : ГИТТЛ, 1955.


*Санкт-Петербургский государственный университет*

**УДК 517.925**

**О.В. Баева**

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

В работе рассмотрена модель химической реакции, для которой определены условия, при которых будет наблюдаться циклическое изменение состава веществ в реакции.

В серии статей Росслера [1] предложены абстрактные модели химических реакций с постепенно усложняющимися колебаниями. Значение этих моделей состоит в том, что усложненные решения получаются даже для простых нелинейных систем.

В общем случае модель химической реакции с постепенно усложняющимися колебаниями [1. С. 64] можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = a(\lambda)x - b(t,\lambda)xy - c(\lambda)z, \\ \dot{y} = d(t,\lambda)x^2 - f(\lambda)y, \\ \dot{z} = k(\lambda)(lx - z) + m(t,\lambda)xz^2, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y, z$ – количество концентраций химических веществ, $a, b, c, d, f, k, l, m$ – коэффициенты, слагаемое $bxy$ характеризует взаимодействие веществ $x$ и $y$ при смешивании, $dx^2$ – взаимодействие веществ $x$ при смешивании, $mxz^2$ – взаимодействие веществ $x$ и $z$ при смешивании, причем $b, d, m$ – коэффициенты, которые могут быть периодическими функциями $t$, $\lambda$ – параметр системы, характеризующий влияние внешней среды на скорость протекания реакции.

Положим $k(\lambda)l = c(\lambda), k(\lambda) = -a(\lambda)$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a(\lambda)x - c(\lambda)z - b(t,\lambda)xy, \\ \dot{y} = d(t,\lambda)x^2 - f(\lambda)y, \\ \dot{z} = c(\lambda)x + a(\lambda)z + m(t,\lambda)xz^2, \end{cases} \tag{2}$$

Определим условия, при которых концентрация химических веществ $x, y$ и $z$ через время $t = T$ восстановится до первоначального состояния.

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi$, получим систему вида

$$\begin{cases} \dot{\rho} = a(\lambda)\rho - b(t,\lambda)\rho y\cos^2\varphi + m(t,\lambda)\rho^3\cos\varphi\sin^3\varphi, \\ \dot{y} = d(t,\lambda)\rho^2\cos^2\varphi - f(\lambda)y, \\ \dot{\varphi} = c(\lambda) + m(t,\lambda)\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + b(t,\lambda)y\cos\varphi\sin\varphi, \end{cases} \tag{3}$$

Объединяя первое и второе уравнения в системе (3) и вводя новую переменную $w = (\rho, y)$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{w} = \begin{bmatrix} a(\lambda) & 0 \\ 0 & -f(\lambda) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} m(t,\lambda)\rho^2\cos\varphi\sin^3\varphi & -b(t,\lambda)\rho\cos^2\varphi \\ d(t,\lambda)\rho\cos^2\varphi & 0 \end{bmatrix} w, \\ \dot{\varphi} = c(\lambda) + m(t,\lambda)\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + b(t,\lambda)y\cos\varphi\sin\varphi, \end{cases} \tag{4}$$

в которой

$$w \in R^m\ (m = 2),\ \varphi \in R^p(p = 1),\ \lambda \in R^q,\ A(\lambda) = \begin{bmatrix} a(\lambda) & 0 \\ 0 & -f(\lambda) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t,\varphi,w,\lambda) = m(t,\lambda)\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + b(t,\lambda)y\cos\varphi\sin\varphi,\ \mu(\lambda) = c(\lambda),$$

$$X(t,\varphi,w,\lambda) = \begin{bmatrix} m(t,\lambda)\rho^2\cos\varphi\sin^3\varphi & -b(t,\lambda)\rho\cos^2\varphi \\ d(t,\lambda)\rho\cos^2\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

причем $X(t,\varphi,0,\lambda) = 0, \Phi(t,\varphi,0,\lambda) = 0$.

Предположим, что для вектор-функции $\mu(\lambda)$ имеет место равенство $\mu(\lambda) = B\lambda + \Theta(\lambda)$. Полагаем, что вектор-функция $\gamma(\lambda)$ определяется равенством $\gamma(\lambda) = (a(\lambda), -f(\lambda))$ и представляется в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|)$, где $D$ – $s \times q$-матрица, $\lim\limits_{\lambda \to 0} (o|\lambda|)/|\lambda| = 0$.

Непосредственно можно убедиться, что система (4) при введенных предположениях удовлетворяет условиям а)–д) [2].

Пусть $a(\lambda) = \lambda_1$, $c(\lambda) = -\lambda_3$, $f(\lambda) = \lambda_2$. Тогда $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\mu(\lambda) = -\lambda_3$, $\mu(0) = 0$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – параметр системы, характеризующий влияние внешней среды на скорость протекания реакции.

Так как $\mu(\lambda) = -\lambda_3$, то $B = -1$, $\Theta(\lambda) = 0$. Поскольку вектор-функция $\gamma(\lambda) = (a(\lambda), -f(\lambda)) = (\lambda_1, -\lambda_2)$ представима в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|)$, то $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ – неособенная матрица, $o(|\lambda|) \equiv 0$.

Таким образом, убеждаемся, что выполнены все условия теоремы [2].

**Теорема [2].** Пусть:

1) система уравнений (4) удовлетворяет условиям а)–д) [2];

2) в условии д) $rangB = p$;

3)вектор-функция $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \ldots, \gamma_s(\lambda))$ представима в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|)$, где $D$ – $s \times q$-матрица, вектор-функция $o(|\lambda|)$ удовлетворяет условию Липшица по $\lambda$ с постоянной $p(\delta)$, $p(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;

4) $rangD = s$.

Тогда существуют число $d > 0$ и значение параметра $\nu = (\lambda, \varepsilon)$, при которых система (4) имеет ненулевое $T$-периодическое решение из класса $C(d,k)$.

Так как $rangB = 1$, $D$ – неособенная матрица, то существует значение параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ такое, что система (4) (а следовательно, (2)) имеет ненулевое $T$-периодическое решение. Тем самым найдены условия, при которых будет наблюдаться циклическое изменение состава концентраций веществ $x, y$ и $z$ в реакции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гарел, Д.* Колебательные химические реакции /Д. Гарел, О. Гарел. – М.: Мир, 1986.
2. *Баева, О.В.* Определение условий существования периодического решения системы дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2006. – №11. – С. 32–33.
3. *Баева, О.В.* Условия существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с параметром // Современные проблемы математики, механики, информатики: тезисы докладов Международной научной конференции. – Тула; ТулГУ, 2006. – С. 16–18.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517.925**



**О.В. Баева**


# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ОСОБЯМИ


В работе изучена проблема определения

условий, при которых в результате конкурентных взаимодействий между особями $x_i, i = 1,2,3,4$, через время $t = T$ численность особей каждого вида восстановится до первоначального состояния.

В книге [1] была рассмотрена модель, учитывающая конкуренцию за питательный субстрат (или «жизненное пространство») между простейшими белково-нуклеотидными комплексами – гиперциклами (как одинаковыми, так и разными).

На происходящий биологический процесс влияют такие периодические изменения условий среды, как суточные, сезонные и годичные ритмы.

В общем случае математическая модель имеет вид

$$\dot{x}_i = k_i(\lambda)x_i - \sum_{j=1}^{n} l_i(t,\lambda)x_i x_j - \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} \chi_{ij}(t,\lambda)x_i x_j =$$

$$= k_i(\lambda)x_i - l_i(t,\lambda)x_i^2 - \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} \eta_{ij}(t,\lambda)x_i x_j, \tag{1}$$

где $x_i$ – концентрация гиперциклов $i$-го вида, $k_i(\lambda)$ – коэффициент естественного воспроизводства концентрации гиперциклов $i$-го вида в отсутствии гиперциклов остальных видов, конкурентную борьбу всех особей популяции за субстрат характеризуют слагаемые $\sum_{j=1}^{n} l_i(t,\lambda)x_i x_j$, члены $\sum_{j=1}^{n} \chi_{ij}(t,\lambda)x_i x_j$, $j \neq i$ – взаимодействие особей разного типа (поэтому в сумму не входят члены с $i = j$), члены $l_i(t,\lambda)x_i^2$ описывают эффект «тесноты» (то есть разрушение (гибель) при встрече двух одинаковых элементов), $\lambda$ – параметр системы, характеризующий влияние внешней среды на конкурентное взаимодействие между особями.

Система эволюционирует в пространстве и ее элементы могут в нем перемещаться. Случайные изменения последовательности нуклеотидов (мутации) с точки зрения передачи и запоминания информации в процессе возникновения генетического кода являются помехами. Важны мутации, изменяющие единый код, то есть
переводящие гиперцикл из одного состояния в другое.

Рассмотрим влияние помех (мутаций) в рамках приведенной выше модели, учитывая перевод особей из одной популяции в другую.

Тогда в случае $n = 4$ с учетом помех система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1(\lambda)x_1 - l_1(t,\lambda)x_1^2 - \eta_{12}(t,\lambda)x_1x_2 - \eta_{13}(t,\lambda)x_1x_3 - \eta_{14}(t,\lambda)x_1x_4 - \\ \qquad - \alpha_1(\lambda)x_1 + \alpha_2(\lambda)x_2, \\ \dot{x}_2 = k_2(\lambda)x_2 - l_2(t,\lambda)x_2^2 - \eta_{21}(t,\lambda)x_1x_2 - \eta_{23}(t,\lambda)x_2x_3 - \eta_{24}(t,\lambda)x_2x_4 - \\ \qquad - \alpha_2(\lambda)x_2 - \alpha_1(\lambda)x_1, \\ \dot{x}_3 = k_3(\lambda)x_3 - l_3(t,\lambda)x_3^2 - \eta_{31}(t,\lambda)x_1x_3 - \eta_{32}(t,\lambda)x_2x_3 - \eta_{34}(t,\lambda)x_3x_4 - \\ \qquad - \alpha_3(\lambda)x_3 + \alpha_4(\lambda)x_4, \\ \dot{x}_4 = k_4(\lambda)x_4 - l_4(t,\lambda)x_4^2 - \eta_{41}(t,\lambda)x_1x_4 - \eta_{42}(t,\lambda)x_2x_4 - \eta_{43}(t,\lambda)x_3x_4 - \\ \qquad - \alpha_4(\lambda)x_4 - \alpha_3(\lambda)x_3, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_i(\lambda)$ – коэффициент перевода.

Пусть $k_1(\lambda) = k_2(\lambda),\ \alpha_1(\lambda) = \alpha_2(\lambda) = g_1(\lambda),\ k_3(\lambda) = k_4(\lambda),\ \alpha_3(\lambda) = \alpha_4(\lambda) = g_2(\lambda)$. Тогда $k_1(\lambda) - \alpha_1(\lambda) = k_2(\lambda) - \alpha_2(\lambda) = f_1(\lambda),\ k_3(\lambda) - \alpha_3(\lambda) = k_4(\lambda) - \alpha_4(\lambda) = f_2(\lambda)$.

Определим условия, при которых в результате конкурентных взаимодействий между особями $x_i, i = 1,2,3,4$, через время $t = T$ численность особей каждого вида восстановится до первоначального состояния, то есть будет иметь место периодический процесс.

Перейдем в системе (2) к полярным координатам с помощью замен

$$x_1 = \rho_1\cos\varphi_1,\ x_2 = \rho_1\sin\varphi_1,\ x_3 = \rho_2\cos\varphi_2,\ x_4 = \rho_2\sin\varphi_2.$$

Получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \left(A(\lambda) + X(t,\varphi,\rho,\lambda)\right)\rho, \\ \dot{\varphi} = \mu(\lambda) + \Phi(t,\varphi,\rho,\lambda), \end{cases} \tag{3}$$

в которой $\rho = (\rho_1,\rho_2)$, $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$, $A(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) \end{bmatrix}$, $\mu(\lambda) = -\begin{pmatrix} g_1(\lambda) \\ g_2(\lambda) \end{pmatrix}$, $X(t,\rho,\varphi,\lambda)$ – $2\times 2$-матрица, $\Phi(t,\varphi,\rho,\lambda)$ – 2-мерная вектор-функция, причем $X(t,\varphi,0,\lambda) = 0, \Phi(t,\varphi,0,\lambda) = 0$.

Предположим, что для вектор-функции $\mu(\lambda)$ имеет место равенство $\mu(\lambda) = B\lambda + \Theta(\lambda)$, где $\mu(0) = 0$.

Полагаем, что вектор-функция $\gamma(\lambda) = \left(f_1(\lambda), f_2(\lambda)\right)$ представляется в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + o\left(|\lambda|\right)$, где $D - s\times q$-матрица, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(o|\lambda|\right)/|\lambda| = 0$.

Непосредственно можно убедиться, что система (3) при введенных предположениях удовлетворяет условиям а)–д) [2].

Пусть в системе (3) $g_1(\lambda) = \lambda_4$, $g_2(\lambda) = \lambda_5$, $f_1(\lambda) = -2\lambda_1 + 8\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3$, $f_2(\lambda) = \lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2/4 + \lambda_1\lambda_3^2$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ – параметр системы (3).

Поскольку $\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda_4 \\ -\lambda_5 \end{pmatrix}$, то $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ – неособенная матрица. Так как для вектор-функции $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)) = (-2\lambda_1 + 8\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3,$ $\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2/4 + \lambda_1\lambda_3^2)$ справедливо представление $\gamma(\lambda) = D\lambda + o(|\lambda|)$, то $D = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, где $rangD = 1 < 2$.

Заметим, что $\gamma(\lambda) = D\lambda + b_2(\lambda) + o(|\lambda|^2)$, где $b_2(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3 \\ -\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^2/4 \end{pmatrix}$ – вектор-форма $2$-го порядка относительно вектора $\lambda$.

Введем замену переменных $\lambda = ru$, $r > 0$.

Тогда, ссылаясь на рассуждения, приведенные в работе [2], получим $P(u) = colon(D^* u, b_2''(u))$, где $D^* = [-2 \ \ 8 \ \ 6]$, $b_2''(u) = (-u_1u_2 + u_1^2/4)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $u^* = (1, 1/4, 0)$, $|u^*| = 1$, выполнены равенства $D^* u^* = 0$, $b_2''(u) = 0$.

Разложим вектор-функцию $b_2''(u)$ в точке $u = u^*$ по формуле Тейлора, получим

$$b_2''(u) = D(u^*)(u - u^*) + \sum_{j=2}^{k} p_j(u^*, u - u^*),$$

где $D(u^*) = [1/2 \ \ -1 \ \ 0]$ – значение матрицы Якоби вектор-формы $b_2''(u)$, вычисленное в точке $u^*$.

Согласно рассуждениям, приведенным в работе [2], имеем матрицу $L = colon(D^*, D(u^*))$, где $L = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $rangL = 2$.

Таким образом, убеждаемся, что выполнены все условия следующей теоремы.

**Теорема [2].** Пусть:

1) система уравнений (3) удовлетворяет условиям а)–д) [2];

2) в условии д) матрица $B$ неособенная;

3) вектор-функция $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \ldots, \gamma_s(\lambda))$ представима в виде $\gamma(\lambda) = D\lambda + b_k(\lambda) + o(|\lambda|^k)$, где $rangD = r < s$, вектор-функция $o(|\lambda|^k)$

удовлетворяет условию Липшица по $\lambda$ с постоянной $p(\delta)$, $p(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;

4) $rangK = s$.

Тогда существуют число $d > 0$ и значение параметра $\nu = (\lambda, \varepsilon)$, при которых система (3) имеет ненулевое $T$-периодическое решение из класса $C(d,k)$.

Так как матрица $B$ – неособенная, $rangD = 1 < 2$ и $rangL = 2$, то существует значение параметра $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, при котором система (3) (а следовательно, (2)) имеет ненулевое $T$-периодическое решение. Тем самым определены условия, при которых в результате конкурентных взаимодействий между особями $x_i, i = 1,2,3,4$ имеет место периодическое изменение количества особей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Романовский, Ю.М.* Математическая биофизика / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1984.
2. *Баева, О.В.* Разрешимость задачи о существовании периодических решений системы дифференциальных уравнений с параметром // Известия Тульского государственного университета. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – Тула; ТулГУ, 2006. – С. 3–7. – Вып.1.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517.9**



**Д.А. Куликов**


## ЦИКЛЫ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ДВУХ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ


В работе рассматривается задача о динамике двух близких по своим параметрам слабосвязанных осцилляторов. Показано, что задача сводится к исследованию вспомогательной системы дифференциальных уравнений – нормальной форме. Для полученной системы найдены аналитически все автомодельные периодические решения.


**Введение.** Система двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля является классической в теории колебаний и нелинейной динамике [1]. Соответствующая система уравнений не имеет точного аналитического решения. В связи с этим при ее исследовании традиционно используется асимптотические методы. Основным, по-видимому, следует считать метод нормальных форм. Хорошо известный алгоритм позволяет свести задачу к исследованию вспомогательной системы дифференциальных уравнений – нормальной форме. Структура этой системы дифференциальных уравнений, конечно, значительно проще, но не настолько, чтобы изучить ее просто интегрированием. При ее изучении используются методы качественной теории дифференциальных уравнений и главное внимание уделяется нахождению аттракторов. Простейшими из них будут неподвижные точки и периодические решения. Как оказалось уже при нахождении периодических решений есть определенные трудности и для их преодоления использовались, как правило, численные методы (см., например, работы обзорного характера [1–4]). В этих работах соответствующие уравнения интегрировались методом Рунге-Кутта. Тем не менее, для исследований более сложных аттракторов представляет интерес аналитические формулы для периодических решений. В работе предложен способ нахождения периодических решений, где использование численного счета сведено к минимуму. Численный счет используется на последнем этапе, где определяются корни алгебраических уравнений.

**1. Постановка задачи. Нормальная форма.** В работе рассматривается система двух неидентичных слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля-Дуффинга

$$\begin{gathered}\ddot{x}_1 - 2\varepsilon g_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \dot{x}_1 x_1^2 + bx_1^3 + \varepsilon\gamma\left(x_1 - x_2\right) + \varepsilon\beta\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) = 0,\\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon g_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \dot{x}_2 x_2^2 + bx_2^3 + \varepsilon\gamma\left(x_2 - x_1\right) + \varepsilon\beta\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) = 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon$ – малый неотрицательный параметр, $g_1, g_2, \beta, \omega_1, \omega_2$ – неотрицательные постоянные, $b, \gamma \in \mathrm{R}.$ Дополнительное ограничение состоит в том, что оба осциллятора считаются близкими. Это условие можно выразить в следующей форме

$$g_1 = 1 + \varepsilon g,\ g_2 = 1 - \varepsilon g,\ \omega_1^2 = 1 + \varepsilon a,\ \omega_2^2 = 1 - \varepsilon a,$$

где $g, a \in \mathrm{R}.$

Используя известный алгоритм построения нормальной формы [5, 6], получаем, что изучение динамики системы (1.1) может быть сведено к исследованию следующей системы из двух дифференциальных комплексных уравнений – нормальной формы Пуанкаре-Дюлака. Ее главная часть имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_1 = d\exp(-i\alpha)\left(\xi_2 - \xi_1\right) + \left(1 + g + \tfrac{a}{2}i\right)\xi_1 - (1 + ic)\xi_1|\xi_1|^2,\\ \dot{\xi}_2 = d\exp(-i\alpha)\left(\xi_1 - \xi_2\right) + \left(1 - g - \tfrac{a}{2}i\right)\xi_2 - (1 + ic)\xi_2|\xi_2|^2,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $c = -3b,\ d\exp(-i\alpha) = \frac{1}{2}(\beta - i\gamma).$

В работе рассматривается вопрос о нахождении автомодельных периодических решений, то есть решений вида

$$\xi(t) = y\exp(i\sigma t), \tag{1.3}$$

$$y = colon(y_1, y_2), \xi(t) = colon(\xi_1(\mathrm{t}), \xi_2(t)), y_1, y_2 \in C, \sigma \in \mathrm{R}.$$

Отметим, что решения вида (1.3), когда $a = g = 0$ были найдены в работах [5, 6]. Это, так называемый, случай полностью идентичных осцилляторов. Тем самым предлагаемая работа дополняет результаты статей [5, 6]. Полезно напомнить, что при $a = g = 0$ два решения вида (1.3) очевидны

$$\xi_{ан}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\exp(-ict),\ \xi_{пр}(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rho_{пр}(i\sigma_{пр}),$$

где $\rho_{np}^2 = 1 - 2d\cos\alpha,\ \sigma_{np} = 2d\sin\alpha - c\rho_{np}^2$. Первый из них носит название синхронного (цикла Андронова-Хопфа), а второй – асинхронного (противофазного) (см. [1–4]). Именно они чаще всего отмечались в литературе. Однако интерес представляют иные циклы ($|y_1| \neq |y_2|$) – асимметричные. Отыскание этих циклов и составляло значительные трудности.

**2. Автомодельные циклы.** Для нахождения циклов (1.3) положим

$$y_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1),\ y_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2),\ \lambda = \frac{\rho_2}{\rho_1},\ \rho_1^2 = \frac{R}{\lambda},\ \rho_2^2 = R\lambda,\ \psi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (2.1)$$

Из вида замен (2.1) ясно, что $R, \lambda > 0$, а $\varphi_1, \varphi_2 \in R$.

Подставим (1.3) с учетом равенств (2.1) в систему дифференциальных уравнений (1.2). После разделения действительных и мнимых частей получим систему из четырех действительных уравнений

$$d(1 - \lambda\cos\psi) = k_1 - d_1\left(1 - \frac{R}{\lambda}\right), \quad (2.2)$$

$$d\left(1 - \frac{\cos\psi}{\lambda}\right) = -k_3 - d_1(1 - R\lambda), \quad (2.3)$$

$$-d\lambda\sin\psi = k_2 + b_1\left(1 - \frac{R}{\lambda}\right), \quad (2.4)$$

$$\frac{d\sin\psi}{\lambda} = -k_4 + b_1(1 - R\lambda) \quad (2.5)$$

для определения четырех неизвестных $R, \lambda, \psi, \sigma.$ Здесь

$$k_1 = g\cos\alpha + \left(\sigma + c - \frac{a}{2}\right)\sin\alpha,\ k_2 = g\sin\alpha + \left(\frac{a}{2} - \sigma - c\right)\cos\alpha,$$

$$k_3 = g\cos\alpha - \left(\frac{a}{2} + \sigma + c\right)\sin\alpha,\ k_4 = g\sin\alpha + \left(\frac{a}{2} + \sigma + c\right)\cos\alpha,$$

то есть они и включают четвертую неизвестную $\sigma$. Наконец,

$$d_1 = c\sin\alpha - \cos\alpha,\ b_1 = c\cos\alpha + \sin\alpha.$$

Вычтем из уравнения (2.3) уравнение (2.4). Тогда получим равенство, из которого элементарно выражается $R$:

$$R = \frac{d}{d_1}\left[\frac{2q_1}{\lambda - 1/\lambda} + \cos\psi\right], \quad (2.6)$$

где $q_1 = (2g\cos\alpha - a\sin\alpha)/2d.$ Сложив равенства (2.2) и (2.3) и используя (2.6), выразим $\sigma$. Итак,

$$\sigma = \frac{d}{\sin\alpha}\left[1 + \frac{d_1}{d} - (\lambda + 1/\lambda)\cos\psi - q_1\frac{\lambda + 1/\lambda}{\lambda - 1/\lambda}\right] - c. \quad (2.7)$$

Аналогичные преобразования с уравнениями (2.4), (2.5), в которых следует учесть равенства (2.6), (2.7) приводят к следующей системе уравнений:

$$(\lambda + 1/\lambda)\sin\psi + h(\lambda - 1/\lambda)\cos\psi = -S_1,$$

$$-(\lambda - 1/\lambda)\sin\psi + H(\lambda + 1/\lambda)\cos\psi = S_3 - S_2\frac{\lambda + 1/\lambda}{\lambda - 1/\lambda}, \quad (2.8)$$

где $h = \dfrac{b_1}{d_1}, H = \dfrac{1}{d_1 \sin\alpha} - ctg\alpha, S_1 = \dfrac{1}{d}[2g(\sin\alpha + h\cos\alpha) + a(\cos\alpha - h\sin\alpha)],$

$S_2 = \dfrac{1}{dd_1 \sin\alpha}[2g\cos\alpha - a\sin\alpha], S_3 = \dfrac{2(1 - d\cos\alpha)}{d\sin\alpha}.$

Рассматривая систему (2.8) как систему уравнений для определения $\cos\psi$ и $\sin\psi$, находим, что

$$\cos\psi = \frac{S_3(\lambda^2 - 1/\lambda^2) - S_2(\lambda + 1/\lambda)^2 - S_1(\lambda - 1/\lambda)^2}{(H(\lambda + 1/\lambda)^2 + h(\lambda - 1/\lambda)^2)(\lambda - 1/\lambda)}, \tag{2.9}$$

$$\sin\psi = \frac{(\lambda + 1/\lambda)S_4 - S_3(\lambda - 1/\lambda)h}{H(\lambda + 1/\lambda)^2 + h(\lambda - 1/\lambda)^2}, \tag{2.10}$$

где $S_4 = S_2 h - S_1 H.$

**Замечание.** Все эти преобразования производились при $\lambda \neq 1$. Случай $\lambda = 1$ следует разбирать отдельно, и он содержателен тогда, когда осцилляторы полностью идентичны ($a = g = 0$).

Положим, теперь

$$x = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}. \tag{2.11}$$

Очевидно, что $x \in [-1;0) \cup (0;1),$ если $\lambda \neq 1$. Используя основное тригонометрическое тождество, формулы (2.9), (2.10) и замену (2.11) для определения $x$ получаем алгебраическое уравнение шестой степени

$$p_6 x^6 + p_5 x^5 + p_4 x^4 + p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0 = 0, \tag{2.12}$$

где $p_6 = h^2(4 + S_3^2) + S_1^2, p_5 = -2S_3(S_1 + S_4 h), p_4 = 8Hh + S_3^2(1 - h^2) + (2S_2 -$
$- S_1)S_1 + S_4^2, p_3 = 2S_3(S_1 - S_2 + hS_4), p_2 = 4H^2 - S_3^2 + S_2^2 - S_4^2 - 2S_2 S_1,$
$p_1 = 2S_2 S_3, p_0 = -S_2^2.$ Как уже было отмечено, у уравнения (2.12) нас интересуют только те корни, для которых справедливо включение $x \in [-1;0) \cup (0;1).$

**Теорема 1.** Любому подходящему корню уравнения (2.12) соответствует цикл вида (1.3), параметры которого восстанавливаются по формулам (2.1), (2.6), (2.7), (2.9), (2.10), при этом $\lambda = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}.$

Из теоремы следует простой вывод, что система (1.3) не может иметь более шести автомодельных циклов. Понятно, что уравнение (2.12) аналитически решить затруднительно, но легко это сделать численно, придавая конкретные значения параметрам. Так, например, при $\alpha = \frac{\pi}{3}, c = 10, a = 0, g = 1$ и $d \in (7.9; 8.2)$ существуют шесть циклов. Корни уравнения (2.12) можно искать наипростейшим способом: делением отрезка пополам ($x \in [-1;0) \cup (0;1)$).

**3. Устойчивость автомодельных решений.** Для исследования устойчивости решений (1.3) удобно выписать вспомогательную систему из трех действительных уравнений. Положим

$$\xi_j(t)=\rho_j(t)\exp(i\varphi_j(t))\,(j=1,2),\ \psi(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t),$$

$$\rho_1(t)=\sqrt{2\rho(t)}\sin(\frac{\theta(t)}{2}+\frac{\pi}{4}),\rho_2(t)=\sqrt{2\rho(t)}\cos(\frac{\theta(t)}{2}+\frac{\pi}{4}), \tag{3.1}$$

где $\theta(t)\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. После замены $t=\frac{s}{2}$, подстановки (3.1) в систему (1.2) получаем следующую систему из трех дифференциальных уравнений для $\rho(t),\theta(t),\psi(t)$:

$$\rho'=[1-d\cos\alpha+g\sin\theta+d\cos\alpha\cos\theta\cos\psi]\rho-\rho^2(1+\sin^2\varphi),$$

$$\theta'=g\cos\alpha+d\sin\alpha\sin\psi-d\cos\alpha\sin\theta\cos\psi-\rho\sin\theta\cos\theta,$$

$$\psi'=c\rho\sin\theta-a-d\sin\alpha\cos\psi\,tg\theta-d\cos\alpha\frac{\sin\psi}{\cos\theta}, \tag{3.2}$$

где штрихом обозначена производная по s. Автомодельным циклам соответствуют состояния равновесия, коэффициенты которых восстанавливаются по формулам

$$\rho=\frac{d}{2xd_1}\left[\frac{S_3x-S_2-S_1x^2}{H+hx^2}+\frac{2g\cos\alpha-a\sin\alpha}{xd}\right],\sin\psi=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\left(\frac{S_4-S_3hx}{H+hx^2}\right),$$

$$\cos\psi=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}\left(\frac{S_3x-S_2-S_1x^2}{H+hx^2}\right),\cos\theta=\sqrt{1-x^2},\sin\theta=-x.$$

После линеаризации на выбранном состоянии равновесия вопрос об устойчивости обычно сводится к исследованию характеристического многочлена

$$\mu^3+P\mu^2+Q\mu+R=0. \tag{3.3}$$

Асимптотическая устойчивость исследуемого состояния равновесия системы (3.2) вытекает из справедливости неравенств

$$P>0,Q>0,R>0,PQ-R>0. \tag{3.4}$$

Определение координат состояния равновесия, коэффициентов характеристического уравнения (3.3) и проверка условий (3.4) осуществлялась численно. Для чего была составлена программа на языке Delphi-5.0, где в цикле по $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})$, $c\in(0;c_0)$, $d\in(0;d_0)$, ($c_0,d_0$ - достаточно большие положительные постоянные) проверялись условия (3.4).

В работе приведем примеры. Пусть $\alpha=\frac{\pi}{3}, c=10, a=0, g=1$. При $d\in(7.9;8.2)$ существуют 4 устойчивых цикла и 2 неустойчивых; при $d\in(7.1;7.9)$ существуют 6 циклов, из которых 3 устойчивы, а 3 – нет. В указанных двух случаях реализуется феномен мультистабильности, когда есть несколько аттракторов. В данном случае – это циклы.

Если теперь рассмотреть случай, когда $d\in(0.1;0.9)$, то оказалось, что существуют 4 цикла и все они неустойчивы. Аттракторы в этом случае имеют более сложную структуру.

В заключение отметим, что из результатов, изложенных в [8] (см. § 4) вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0,$ что при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ каждому грубому циклу (1.3) системы (1.2) соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (1.1) с сохранением свойств устойчивости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пиковский, А.* Синхронизация. Фундаментальное явление / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртц – М.: Техносфера, 2003. – 431 с.

2. *Aronson, D.G.* Amplitude Response of Coupled Oscillators / D.G. Aronson, G.B. Ermentrout, N. Kopell // Phisika –D., 1990. – Vol. 41. – P. 403–449.

3. *Poliashenko, M.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators / M. Poliashenko, S.R. McCay, C.W. Smith // Phys. Rev. – A., 1991. – Vol. 49. – P. 5638–5641.

4. *Кузнецов, А.П.* О динамике двух связанных осцилляторов Ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью / А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2003. – Т.11. – №6. – С. 48–63.

5. *Куликов, Д.А.* Автомодельные периодические решения в задаче о динамике двух слабосвязанных осцилляторов: полный анализ // Вестник Поморского ун-та. – 2006. – №3. – С. 152–156. Серия «Естественные и точные науки».

6. *Куликов, Д.А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2006. – Т. 14. – № 5. – С. 120–132.

7. *Куликов, Д.А.* Аттракторы конечномерного аналога уравнения Гинзбурга-Ландау // Материалы XIV международной научной конференции ЛОМОНОСОВ. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. – 2007. – С. 89.

8. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений / А.Ю.Колесов, А.Н. Куликов. Ярославль; Ярославский гос. университет им. П.Г. Демидова. – 2003. –105 с.

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*

**УДК 517.925**

**Е.Ю. Лискина**

## О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть представляет собой форму нечетного порядка, получены достаточные условия существования изохронного центра.

Исследование проблемы различения центра и фокуса у автономных нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которых имеет пару чисто мнимых собственных значений, требует привлечения нелинейных членов правой части [1, 2]. Методы ее решения предложены в [1– 4], но до настоящего времени проблема является актуальной.

В предлагаемой работе для автономной системы дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть представляет собой форму нечетного порядка, получены достаточные условия существования изохронного центра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A\,x + f(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^2$ – двумерное вещественное векторное пространство, $A$ – постоянная $2 \times 2$-матрица, имеющая пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega > 0$); $f(x)$ – вектор-функция, компонентами которой являются формы порядка $k \geq 2$ относительно компонент вектора $x$ ($k \in \mathbf{N}$). Множество $\Omega(\varepsilon_0)$ задано соотношением: $\Omega(\varepsilon_0) = \left\{x \in \mathbf{R}^2, \|x\| \leq \varepsilon_0\right\}$, $\|x\| = \max\limits_{i=1,2}\left\{|x_i|\right\}$. Система (1) на множестве $\Omega(\varepsilon_0)$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия того, что состояние равновесия $x \equiv 0$ является центром с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

**Лемма.** Матрица $A$ размерности $2 \times 2$ имеет пару собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega > 0$) тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix},\ a^2 < bc,\ bc > 0. \tag{2}$$

**Доказательство.** Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеет пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega > 0$). Характеристическое уравнение матрицы $A$ имеет вид $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$, а его коэффициенты должны удовлетворять системе условий:

$$\begin{cases} ad - bc \neq 0; \\ a + d = 0; \\ (a+d)^2 - 4(ad - bc) < 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = -d; \\ a^2 + bc < 0. \end{cases}$$

Условие $a^2 + bc < 0$ выполняется тогда и только тогда, когда числа $b$ и $c$ разных знаков и $a^2 < |bc|$. С учетом изложенного представим матрицу $A$ в виде $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 < |bc|$, $bc < 0$. Без ограничения общности и для удобства проведения вычислений можно предположить, что числа $b$ и $c$ одного знака, тогда

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$, где $a^2 < bc$, $bc > 0$, $\omega = \sqrt{bc - a^2}$. Лемма доказана.

После замены переменных $x = (E + M)\bar{x}$, $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{2}$ – матрица параметров, непрерывная по свом компонентам, $M(0) = 0$, $E$ – единичная $2 \times 2$-матрица, при сохранении прежних обозначений для вектора $x$, система (1) примет вид

$$\dot{x} = (E + M)^{-1} A(E + M)x + (E + M)^{-1}\left(\bar{f}_k(x) + \bar{\bar{f}}_k(x, M)\right), \tag{3}$$

где $\bar{f}_k(x)$, $\bar{\bar{f}}_k(x, M)$ – формы порядка $k$ относительно компонент вектора $x$.

Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (3) и для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0 \in (0, \delta_{02})$ такое, что для любого вектора $\alpha \in U(\delta_0) = \{\alpha \in R^2,\ \|\alpha\| \le \delta_0\}$ и любой матрицы параметров $M$, элементы которой принадлежат множеству $W(\delta_0)$ ($\delta_{02} = \min\{\varepsilon_0, \delta_{01}\}$, $W(\delta_{01}) = \left\{m_{ij} : i, j = \overline{1, 2},\ |m_{ij}| \le \delta_{01} \Rightarrow \|M\| < 1\right\}$, $\|M\| = \max\limits_{i=1;2}\{|m_{i1}| + |m_{i2}|\}$). Решение $x(t, \alpha, M)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \alpha, M) = \alpha$, определено и непрерывно на промежутке $[0, T]$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, и при любых $t \in [0, T]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t, \alpha, M)\| < \varepsilon$. Так как $\|M\| < 1$, то $(E + M)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} (-1)^i M^i$, причем ряд равномерно сходится [5]. Следовательно, систему (3) можно переписать следующим образом:

$$\dot{x} = Ax + (AM - MA)x + \sum_{i=2}^{+\infty} (-1)^i \left(M^i A - M^{i-1} AM\right)x +$$
$$+ \left(\bar{f}_k(x) + \bar{\bar{f}}_k(x, M)\right) + \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i M^i \left(\bar{f}_k(x) + \bar{\bar{f}}_k(x, M)\right), \tag{4}$$

Выпишем фундаментальную матрицу системы $\dot{x} = Ax$ (матрица $A$ имеет вид (2)), удовлетворяющую условию $X(0) = E$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t & \frac{b}{\omega}\sin\omega t \\ -\frac{c}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \frac{a}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные [6], доказывается, что решение $x(t, \alpha, M)$ системы (4), удовлетворяющее начальному условию $x(t, \alpha, M) = \alpha$, можно представить так: $x(t, \alpha, M) = (X(t) + \Phi(t, \alpha, M))\alpha$, где матрица $\Phi(t, \alpha, M)$ непрерывна по $t$, $x$ и компонентам матрицы $M$ на множестве $[0; T] \times U(\delta_0) \times W(\delta_0)$; $\Phi(0, \alpha, M) = 0$; $\Phi(t, \alpha, M) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\|M\| \to 0$

равномерно по $t \in [0,\ T]$.

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что для любой матрицы $M$ справедливо $\int\limits_0^T X^{-1}(t)(AM - MA)X(t)\alpha\, dt = 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия.

I. $k = 2l + 1$, $l \in \mathbf{N}$.

II. Элементы матрицы $M$ являются формами порядка $l$ относительно компонент вектора $\mu \in \mathbf{R}^m$, $\mu \in V(\delta_0) = \left\{\mu \in R^m,\ \|\mu\|^k \le \delta_0\right\}$.

Тогда условие существования ненулевого $T$-периодического решения системы (2) можно записать так:

$$\int\limits_0^T X^{-1}(t)\left(M^2 A - MAM\right)X(t)\alpha\, dt + \int\limits_0^T X^{-1}(t)F_{k-1}(X(t)\alpha)X(t)\alpha\, dt + o\left(\rho^k\right) = 0,$$

где $F_{k-1}(X(t)\alpha)$ – $2\times 2$-матрица, элементами которой являются формы порядка $(k-1)$ относительно компонент вектора $\alpha$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o\left(\rho^k\right)}{\rho^k} = 0$, $\rho = \max\{\|\alpha\|, \|\mu\|\}$, $\|\alpha\| = \max\limits_{i=1,2}\{|\alpha_i|\}$, $\|\mu\| = \max\limits_{i=1,m}\{|\mu_i|\}$, или

$$s_k(\alpha, \mu) + o\left(\rho^k\right) = 0, \qquad (5)$$

$s_k(\alpha, \mu) = \int\limits_0^T X^{-1}(t)\left(M^2 A - MAM\right)X(t)\alpha\, dt + \int\limits_0^T X^{-1}(t)F_{k-1}(X(t)\alpha)X(t)\alpha\, dt$ – форма порядка $k$ по совокупности компонент векторов $\alpha$ и $\mu$.

Введем обозначения: $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $\zeta = (\beta, \lambda)$, $\|\zeta\| = 1$, $0(\rho) = \frac{o\left(\rho^k\right)}{\rho^k}$, $\lim\limits_{\rho\to 0} 0(\rho) = 0$, с учетом которых систему (5) можно записать так:

$$\widetilde{s}_k(\zeta) + 0(\rho) = 0. \qquad (6)$$

**Теорема 1.** Если при любом $\zeta$, $\|\zeta\| = 1$, выполнено неравенство $\widetilde{s}_k(\zeta) \ne 0$, то существует такое число $\delta' \in (0, \delta_0)$, что для любых векторов $\alpha \in U(\delta')$, $\mu \in V(\delta')$ система (2) не имеет ненулевых $T$-периодических решений.

**Доказательство.** Из условий теоремы следует, что при всех $\zeta \in R^{2+m}$, $\|\zeta\| = 1$, выполняется неравенство $\widetilde{s}_k(\zeta) \ne 0$. Так как форма $\widetilde{s}_k$ непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве $\|\zeta\| = 1$, то найдется число $L = \left|\inf\limits_{\|\zeta\|=1}\widetilde{s}_k(\zeta)\right| > 0$ такое, что $\|\widetilde{s}_k(\zeta)\| > L$. Выберем $\delta' \in (0; \delta_0)$ так, чтобы при любом $\zeta \in R^{2+m}$, $\|\zeta\| = 1$, некотором фиксированном $\rho \in (0, \delta')$ выполнялось неравенство $\|0(\rho)\| < \frac{L}{2}$. Тогда при любом $\zeta \in R^{2+m}$, $\|\zeta\| = 1$, имеет место неравенство $\widetilde{s}_k(\zeta) + 0(\rho) = 0$. Следовательно, система (5) в $\varepsilon$-окрестности начала координат не имеет других решений, кроме нулевого. Это означает, что при всех $\alpha \in U(\delta')$, $\mu \in V(\delta')$ система (2) не имеет ненулевых $T$-периодических решений. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования ненулевого семейства $T$-периодических решений системы (2).

**Теорема 2.** Пусть:

1) выполняются условия I, II;

2) существует такое число $\delta' \in (0, \delta_0)$, что для любого вектора $\mu \in V(\delta')$ существует зависимость $\alpha(\mu)$ ($\alpha(\mu) \neq 0$ при $\mu \neq 0$) такая, что $s_k(\alpha(\mu), \mu) = 0$;

3) $rang\, D\widetilde{s}_k(\zeta) = 2$, где $D\widetilde{s}_k(\zeta)$ – $2 \times (2+m)$-мерная матрица Якоби функции $\widetilde{s}_k(\zeta)$, $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $\zeta = (\beta, \lambda)$.

Тогда система (2) имеет семейство ненулевых $T$-периодических решений вида $\overline{x}(t, \alpha(\mu), \mu)$, удовлетворяющих начальным условиям $\overline{x}(0, \alpha(\mu), \mu) = \alpha(\mu)$, где $\alpha(\mu) = \rho(\beta(\lambda) + \Delta\beta(\lambda))$, $\mu = \rho(\lambda + \Delta\lambda)$.

**Доказательство.** В силу условий 1) и 2) теоремы для любого фиксированного вектора $\mu_0 \in V(\delta')$, любого вектора $\mu \in V(\delta')$ и соответствующего вектора $\alpha(\mu_0)$ по формуле Тейлора имеем

$$\widetilde{s}_k(\zeta) = \widetilde{s}_k(\zeta_0) + D\widetilde{s}_k(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{k} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = D\widetilde{s}_k(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{k} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta), \qquad (7)$$

где $\zeta_0 = (\beta(\lambda_0), \lambda_0)$, $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $D\widetilde{s}_k(\zeta_0)$ – $n \times (n + m - r)$-мерная матрица Якоби вектор-функции $\widetilde{s}_k(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$, $p_i(\zeta_0; \Delta\zeta)$ – непрерывная вектор-форма порядка $i$ относительно $\Delta\zeta$, $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$, $\Delta\zeta = (\Delta\beta, \Delta\lambda)$.

В силу условия 3) теоремы следует представление

$$D\widetilde{s}_k(\zeta_0)\Delta\zeta = S(\zeta_0)v + \widetilde{S}(\zeta_0)w, \qquad (8)$$

в котором $v$ – $n$-мерный, $w$ – $(m - r)$-мерный векторы, $S(\zeta_0)$, $\widetilde{S}(\zeta_0)$ – матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times (m - r)$ соответственно, $\det S(\zeta_0) \neq 0$. Из равенства (7) следует, что формы $p_i(\zeta_0; \Delta\zeta)$ можно записать в виде

$$\sum_{i=2}^{k} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{k} \left(q_i(\zeta_0; v) + \overline{q}_i(\zeta_0; w)\right) + h(\zeta_0; v, w), \qquad (9)$$

где $q_i(\zeta_0, v)$, $\overline{q}_i(\zeta_0; w)$ – формы порядка $i$ относительно компонент векторов $v$ и $w$ соответственно, $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, $h(\zeta_0; v, w)$ – сумма форм не ниже второго порядка по совокупности компонент векторов $v$ и $w$. Для всех $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$

$$q_i(\zeta_0; 0) = 0, \quad \bar{q}_i(\zeta_0; 0) = 0; \tag{10}$$

$$\lim_{\|w\| \to 0} h(\zeta_0; v, w) = 0 \quad \text{равномерно по } v \text{ на множестве } \|v\| \le \delta',$$

$$\lim_{\|v\| \to 0} h(\zeta_0; v, w) = 0 \quad \text{равномерно по } w \text{ на множестве } \|w\| \le \delta'. \tag{11}$$

С учетом равенств (7) – (11) система (6) примет вид

$$S(\zeta_0) v + \widetilde{S}(\zeta_0) w + \sum_{i=2}^{k} \left(q_i(\zeta_0; v) + \bar{q}_i(\zeta_0; w)\right) + h(\zeta_0; v, w) + 0(\rho) = 0. \tag{12}$$

Так как $\det S(\zeta_0) \ne 0$, то при всех $v$ и $w$, любом $\rho \in (0, \delta')$ равенство (12) определяет некоторый нелинейный оператор

$$\mathrm{H}\, v = -S^{-1}(\zeta_0)\left[\widetilde{S}(\zeta_0) w + \sum_{i=2}^{k} \left(q_i(\zeta_0; v) + \bar{q}_i(\zeta_0; w)\right) + h(\zeta_0; v, w) + 0(\rho)\right], \tag{13}$$

непрерывный по $v$.

Покажем, что этот оператор имеет хотя бы одну неподвижную точку. В самом деле, из соотношений (10), (11), условия 3) теоремы и определения $0(\rho)$ следует, что существуют числа $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$, $0 < \delta \le \delta'$, $0 < \delta_1 \le \delta'$, $0 < \delta_2 \le \delta'$, такие, что при всех $\|v\| \le \delta$, $\|w\| < \delta_1$, $\rho \in (0, \delta_2)$ справедливы оценки:

$$\left\|S^{-1}(\zeta_0)\right\| \left\|\sum_{i=1}^{k} q_i(\zeta_0; v)\right\| < \frac{\delta}{5}, \quad \left\|S^{-1}(\zeta_0)\right\| \left\|\sum_{i=1}^{k} \bar{q}_i(\zeta_0; w)\right\| < \frac{\delta}{5}, \quad \left\|S^{-1}(\zeta_0)\right\| \left\|h(\zeta_0; v, w)\right\| < \frac{\delta}{5},$$

$$\left\|S^{-1}(\zeta_0)\right\| \left\|\widetilde{S}(\zeta_0)\right\| \|w\| < \frac{\delta}{5}, \quad \left\|S^{-1}(\zeta_0)\right\| \|0(\rho)\| < \frac{\delta}{5},$$

из которых следует, что для любых фиксированных $\|w\| < \delta_1$, $\rho \in (0, \delta_2)$ оператор $\mathrm{H}$ непрерывен по $v$ и отображает множество $\overline{V}(\delta) = \left\{ v \in R^n, \|v\| \le \delta \right\}$ в себя. По теореме Брауэра [7. С. 621] существует вектор $v^* \in \overline{V}(\delta)$ такой, что $\mathrm{H}\, v^* = v^*$.

Зафиксируем произвольные $\|w^*\| < \delta_1$, $\rho^* \in (0, \delta_2)$. Для неподвижной точки $v^* \in \overline{V}(\delta)$ построим $\mu^* = \rho^*(\lambda_0 + \Delta\lambda^*)$, $\alpha(\mu^*) = \rho^*\left(\beta(\lambda_0) + \Delta\beta(\lambda^*)\right)$, вектор $\left(\Delta\lambda^*, \beta(\Delta\lambda^*)\right)$ составлен из компонент вектора $(v^*, w^*)$. В силу произвольности выбора $\mu_0 \in V(\delta')$ и $\rho \in (0, \delta')$ система (2) имеет семейство ненулевых $T$-периодических решений вида $\bar{x}(t, \alpha(\mu), \mu)$ с начальными условиями $\bar{x}(0, \alpha(\mu), \mu) = \alpha(\mu)$, $\alpha(\mu) = \rho\left(\beta(\lambda) + \Delta\beta(\lambda)\right)$, $\mu = \rho(\lambda + \Delta\lambda)$. Теорема доказана.

**Замечание.** Подставляя найденное решение системы (2) в выражение $x = (E + M)\bar{x}$, получим семейство ненулевых $T$-периодических решений системы (1) $x(t, \alpha) = (E + M)\,\bar{x}(t, \alpha(\mu), \mu) = x(t, \alpha(\mu))$ с начальными условиями $x(0, \alpha(\mu)) = \alpha(\mu)$.

**Пример.** Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -cx_1 - dx_1^3. \end{cases} \tag{14}$$

Система (14) имеет вид (1), в котором $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -dx_1^3 \end{pmatrix}$, $c > 0$, $d > 0$. Тогда $\omega = \sqrt{c}$, $X(t) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{c}t & \frac{1}{\sqrt{c}}\sin\sqrt{c}t \\ -\sqrt{c}\sin\omega t & \cos\sqrt{c}t \end{pmatrix}$. Выполним замену переменных $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, где $m_{ij}$ – линейные формы относительно компонент вектора $\mu \in \mathbf{R}^m$ ($i, j = \overline{1; 2}$). Проводя изложенные рассуждения, получаем

$$s_3(\alpha, M) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{c^3}}\left(\frac{3d\alpha_2}{4c}\left(c\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \alpha_2\left(c(m_{11} - m_{22})^2 + (cm_{12} + m_{21})^2\right)\right) \\ -\frac{\pi}{\sqrt{c}}\left(\frac{3d\alpha_1}{4c}\left(c\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \alpha_1\left(c(m_{11} - m_{22})^2 + (cm_{12} + m_{21})^2\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Уравнение $s_3(\alpha, M) = 0_2$ имеет вещественные решения вида

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pm 2\sqrt{\frac{c\left(c(m_{11} - m_{22})^2 + (cm_{12} + m_{21})^2\right) - 3d\alpha_2^2}{3dc}}, \\ |\alpha_2| \le \sqrt{\frac{c\left(c(m_{11} - m_{22})^2 + (cm_{12} + m_{21})^2\right)}{3d}}, \\ m_{ij} - \text{произвольные формы}, \\ i,j = \overline{1;2}; \end{cases}$$

Положим $m_{ij} = \mu \in \mathbf{R}$ ($i, j = \overline{1; 2}$), тогда

$$s_3(\alpha, M) = s_3(\alpha, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\sqrt{c^3}}\left(\frac{3d\alpha_2}{4c}\left(c\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \alpha_2(c+1)^2\mu^2\right) \\ -\frac{\pi}{\sqrt{c}}\left(\frac{3d\alpha_1}{4c}\left(c\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \alpha_1(c+1)^2\mu^2\right) \end{pmatrix},$$

а ненулевые решения уравнения $s_3(\alpha, \mu) = 0_2$ примут следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pm 2\sqrt{\frac{c(c+1)^2\mu^2 - 3d\alpha_2^2}{3dc}}, \\ \left|\alpha_2\right| \le \sqrt{\frac{c}{3d}}(c+1)|\mu|, \quad \mu \in \mathbf{R}\setminus\{0\}. \end{cases} \tag{15}$$

Выберем числа $\delta_{01} \in (0; 0{,}5)$ и $\delta_0 \in (0; \delta_{01}]$, тогда для любого числа $\mu$ такого, что $|\mu| \le \delta_0$, выполняется неравенство $\|M\| < 1$. Соотношения (15) задают зависимость $\alpha(\mu)$. Выберем $\mu$, $\alpha_2$ и вычислим $\alpha_1$ так, чтобы $|\mu| \in (0; \delta_0]$, $|\alpha_2| \in \left(0; \sqrt{\frac{c}{3d}}(c+1)|\mu|\right)$, $|\alpha_1| = 2\sqrt{\frac{c(c+1)^2\mu^2 - 3d\alpha_2^2}{3dc}}$. Обозначим $\rho = \max\limits_{i=1;2}\{|\alpha_i|, |\mu|\}$, получим $\zeta = (\beta_1, \beta_2, \lambda)$, матрица Якоби вектор-функции $\widetilde{s}_k(\zeta)$

$$D\widetilde{s}_k(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{3\pi d\beta_1\beta_2}{2\sqrt{c^3}} & \frac{\pi\left(4c(c+1)^2\lambda^2 + 3d\left(c\beta_1^2 + \beta_2^2\right)\right)}{4\sqrt{c^5}} & \frac{2\pi(c+1)^2\beta_2\lambda}{\sqrt{c^3}} \\ -\frac{\pi\left(4c(c+1)^2\lambda^2 + 3d\left(c\beta_1^2 + \beta_2^2\right)\right)}{4\sqrt{c^3}} & -\frac{3\pi d\beta_1\beta_2}{2\sqrt{c^3}} & -\frac{3\pi(c+1)^2\beta_1\lambda}{\sqrt{c}} \end{pmatrix},$$

$rangD\widetilde{s}_k(\zeta) = 2$. Таким образом, система (14) удовлетворяет всем условиям теоремы 2, и следовательно, имеет одно семейство ненулевых $T$-периодических решений с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$, заполняющих сплошь некоторую окрестность состояния равновесия $(0, 0)$. Начальные условия семейства $x(0, \alpha(\mu)) = \alpha(\mu)$ определяются соотношениями: $\alpha(\mu) = (\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu))$, $|\alpha_1(\mu)| = 2\sqrt{\frac{c(c+1)^2\mu^2 - 3d\alpha_2^2}{3dc}}$, $|\alpha_2(\mu)| \in \left(0; \sqrt{\frac{c}{3d}}(c+1)|\mu|\right)$, $\mu \in (0; 0{,}5)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Андронов, А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.] – М.: Наука, 1967.
2. *Баутин, Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М: Наука, 1976.
3. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964.
4. *Амелькин, В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. / В.В. Амелькин, Л.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: БГУ, 1982.
5. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
6. *Лискина, Е.Ю.* Существование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2000. – № 3. – С. 53–59.
7. *Канторович, Л. В* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 532.72**



**Н.В. Малай**


# ОСОБЕННОСТИ ОБТЕКАНИЯ НАГРЕТЫХ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ


В приближении Стокса рассмотрено обтекание нагретой твердой сферической

частицы вязкой несжимаемой жидкостью.

**Введение.** В настоящее время все большее значение приобретают научные исследования по различным проблемам физики дисперсных систем. Это связано в первую очередь с развитием лазерной технологии и обострением экологической ситуации – очистки жидкостей от взвешенных в них частиц, которые называют гидрозольными.

Важным научным направлением, развиваемым в рамках механики дисперсных систем, является теоретическое исследование закономерностей поведения твердых частиц (капель) в неоднородных по температуре вязких неизотермических жидких средах, то есть описание движения гидрозольных частиц, средняя температура поверхности которых существенно отличается от температуры окружающей жидкости вдали от них. Это связано с тем, что для большинства жидкостей коэффициент динамической вязкости с увеличением температуры уменьшается по экспоненциальному закону. Следовательно, скорость осаждения существенно изменяется и мы, меняя среднюю температуру поверхности гидрозольной частицы, можем регулировать скорость ее осаждения.

Известно [1], что в случае малых относительных перепадов температуры при решении линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса в сферических координатах методом разделения переменных мы получаем линейное однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для радиальной функции, из решения которого определяются компоненты массовой скорости и давление, которые в свою очередь необходимы для нахождения силы сопротивления и скорости упорядоченного движения гидрозольной частицы.

В случае значительных перепадов температуры, исходя из физических соображений, заключающихся в том, что жидкость действует на любую сферическую границу, описываемую уравнением $r = const$ с одинаковой силой (вытекающее из свойств ортогональности полиномов Лежандра и Гегенбауэра), поэтому как в ранних работах Е.Р. Щукина, О.А. Попова, Н.В. Малая [2–4], так и в более поздних [5–9] решалось неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка для радиальной функции (способ его получения приведен ниже). Достоинством этого метода заключается в том, что мы сразу же получаем выражение для общей силы, действующей на гидрозольную частицу, и рекуррентные соотношения имеют более простой вид.

В настоящей работе проведено теоретическое описание обтекания нагретой твердой частицы вязкой несжимаемой жидкостью на основе непосредственного решения линеаризованного по скорости уравнения Навье-Стокса (с использованием однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка для радиальной функции) и сравнение полученного решения с результатами, полученными на основе решения неоднородного линейного уравнения третьего порядка для радиальной функции.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается обтекание неподвижной неравномерно нагретой твердой гидрозольной частицы радиуса $R$ плоскопараллельным потоком вязкой несжимаемой жидкостью с вязкостью $\mu_e$ со скоростью $U_\infty$. Под нагретой частицей понимают частицу, средняя температура поверхности которой $T_{iS}$ по величине существенно отличается от температуры окружающей среды вдали от нее $T_\infty$. Нагрев поверхности частицы происходит за счет наличия внутренних источников тепла плотностью $q_i$, появление которых может быть обусловлено, например, протеканием объемной химической реакции, процессом радиоактивного распада вещества частицы, поглощением электромагнитного излучения [10] и т.п.

Предполагается, что плотность и теплопроводность вязкой жидкости постоянны, коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности окружающей жидкости и обтекание частицы достаточно медленное (число Рейнольдса много меньше единицы).

Нагрев поверхности частицы может оказать влияние на теплофизические характеристики окружающей среды, то есть на распределение полей скорости и давления в ее окрестности, что в конечном итоге скажется и на силе сопротивления. Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости наиболее сильно зависит от температуры [11]. Для учета зависимости динамической вязкости от температуры воспользуемся формулой, позволяющей описывать изменение вязкости жидкости в широком интервале температур (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [11]):

$$\mu_e = \mu_\infty \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left( \frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right)^n \right] \exp\left\{ -A\left( \frac{T_e}{T_\infty} - 1 \right) \right\}, \qquad (1.1)$$

где $A$ и $F_n$ – постоянные, $\mu_\infty = \mu_e(T_\infty)$, $T_\infty$ – температура жидкости вдали от частицы. Здесь и далее индексы «$e$» и «$i$» будем относить соответственно к вязкой жидкости и частице; индексом «$\infty$» – обозначены параметры жидкости на бесконечности, то есть вдали от частицы и индексом «$s$» – значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы $T_{is}$.

Известно, что вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [11]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул показал, что выражение (1.1) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью. Например, для воды в интервале температур $0 - 90^\circ C$ с относительной погрешностью, не превышающей 2 % ($T_\infty = 273\,K$), имеем: $A = 5.779,\ F_1 = -2.3128,\ F_2 = 9.118$ (формула (1.1) впервые была предложена Е.Р. Щукиным).

**Поскольку частица нагрета, то коэффициент теплопроводности частицы является функцией от температуры. В работе используется степенной вид зависимости теплопроводности частицы от температуры [11]:**

$$\lambda_i = \lambda_{i\infty} \left( \frac{T_i}{T_\infty} \right)^\omega . \qquad (1.2)$$

Здесь $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_\infty)$, $T_i$ – температура частицы, $\omega - const$.

В системе координат, связанной с частицей, распределение температуры и скорости обладает аксиальной симметрией относительно оси $OZ$, проходящей через центр частицы в направлении скорости набегающего потока, поэтому при анализе используется сферическая система координат, в которой радиус $r$ отсчитывается от центра частицы, угол $\theta$ – от направления скорости набегающего потока.

В рамках сформулированных допущений при малых числах Рейнольдса и Пекле в квазистационарном приближении распределения скорости $U_e$, давления $P_e$, температуры $T_e$ и $T_i$ описываются следующей системой уравнений [12]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k}\right)\right\}, \quad div\left(\rho_e U_e\right) = 0, \tag{1.3}$$

$$\Delta T_e = 0, \tag{1.4}$$

$$div\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i. \tag{1.5}$$

При решении системы уравнений (1.3)–(1.4) учитываются следующие граничные условия (в сферической системе координат $r, \theta, \varphi$):

$$r = R, \quad U_r^e = 0, \quad U_\theta^e = 0, \quad T_e = T_i, \quad \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_0 \sigma_1 \left(T_i^4 - T_\infty^4\right), \tag{1.6}$$

$$r \to \infty, \quad U_e \to U_\infty \cos\theta \, e_r - U_\infty \sin\theta \, e_\theta, \quad T_e \to T_{e\infty}, \quad P_e \to P_{e\infty}, \tag{1.7}$$

$$r \to 0, \quad T_i \neq \infty. \tag{1.8}$$

Здесь $U_r^e$ и $U_\theta^e$ – радиальная и тангенциальная компоненты массовой скорости газа в сферической системе координат; $U_\infty = \left|U_\infty\right|$, $U_\infty$ – величина скорости набегающего потока, которая подлежит определению из обращения в ноль полной силы, действующей на частицу, $e_r$ и $e_\theta$ – единичные вектора сферической системы координат; $\sigma_0$ – постоянная Стефана-Больцмана; $\sigma_1$ – интегральная степень черноты; $q_i(r,\theta)$ – внутренние источника тепла, неоднородно распределенные в объеме частицы.

На поверхности частицы (1.6) приняты условия прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости, равенства температур и непрерывность потоков тепла. В качестве граничных условий на бесконечности, то есть вдали от частицы, взяты условия (1.7), а конечность физических величин, характеризующих частицы при $r \to 0$, учтено в (1.8).

Определяющими параметрами задачи являются постоянные $\rho_e, \mu_\infty$ и значения $R$ и $U_\infty$. Из этих параметров можно составить безразмерное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_\infty = \rho_e R U_\infty / \mu_\infty$.

Обезразмерим уравнения (1.3)–(1.5) и граничные условия (1.6)–(1.8), введя безразмерные скорость и температуру следующим образом: $V_e = U_e / U_\infty$, $t = T / T_\infty$. Здесь в качестве единицы измерения расстояния выбран радиус частицы $R$, температуры $T_\infty$.

При $\mathrm{Re}_\infty << 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений гидродинамики и теплопереноса следует искать в виде

$$V_e = V^{(0)} + \varepsilon V^{(1)} + \dots, \quad t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots \tag{1.9}$$

Вид граничных условий (1.6)–(1.8) указывает на то, что выражения для компонент массовой скорости $V_r$ и $V_\theta$ ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [1]. Как показано в [1,12], величина силы, действующая на частицу, определяется первыми членами этих разложений, поэтому в нулевом приближении по $\varepsilon$ мы можем записать

$$V_r^e = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta^e = -g(y)\, sin\theta, \tag{1.10}$$

где $G(y)$ и $g(y)$ – произвольные функции, зависящие от радиальной координаты $y = r/R$.

**2. Поля температуры вне и внутри нагретой частицы.** При нахождении силы, действующей на неравномерно нагретую частицу, ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно знать поля температур вне и внутри частицы. Подставляя (1.9) в обезразмеренные уравнения теплопроводности (1.4)–(1.5), решаем эти уравнения методом разделения переменных. Для нулевых приближений ($\varepsilon = 0$), получаем следующие выражения для полей температур, удовлетворяющих граничным условиям при $y \to \infty$ и $y \to 0$:

$$t_e^{(0)} = 1 + \frac{\gamma_0}{y},$$

$$t_i^{(0)}(y) = \left( B_0 + \frac{1+\omega}{4\pi R \lambda_{i\infty} T_\infty y} \int_V q_i dV + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy \right)^{\frac{1}{1+\omega}},$$

$$\psi_0 = -\frac{1+\omega}{\lambda_{i\infty} T_\infty} y^2 \frac{2n+1}{2} R^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r,\theta) P_n(x) dx. \tag{2.1}$$

Здесь $P_n(x)$ – полиномы Лежандра, $x = cos\theta$.

Постоянные интегрирования $B_0, \gamma_0$ определяются из граничных условий на поверхности частицы и в частности $\gamma_0 = t_{eS} - 1$, где $t_{eS} = T_{eS}/T_\infty$ ($t_{eS} = t_e^{(0)}|_{y=1}$), $T_{eS}$ - средняя температура поверхности частицы, определяемая из решения трансцендентного уравнения (2.2)

$$\frac{T_{eS}}{T_\infty} = 1 + \frac{1}{4\pi R \lambda_{eS} T_\infty} \int_V q_i(r,\theta) dV - \frac{\sigma_0 \sigma_1 R T_\infty^3}{\lambda_{eS}} \left( \frac{T_{eS}}{T_\infty} \right)^4. \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) интегрирование ведется по всему объему частицы, $\lambda_{eS} = \lambda_e(T_{eS})$.

Заметим, что при таком определении постоянной интегрировании $\gamma_0$, ее можно трактовать как безразмерный параметр, характеризующий нагрев поверхности частицы.

При выполнении условия $\lambda_e << \lambda_i$ в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу $\theta$ в системе частица – жидкая среда и считать, что $\mu_e(t_e) \approx \mu_e\left(t_e^{(0)}\right)$. С учетом этого выражение(1.1) принимает вид

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma_0^n}{y^n}\right] exp\left\{-A\frac{\gamma_0}{y}\right\}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) позволяет рассматривать по отдельности тепловую задачу и гидродинамическую. Сшивка решений происходит с помощью граничных условий на поверхности частицы.

**3. Вывод выражений для силы сопротивления.** Как мы отмечали во введении, при нахождении выражений для компонент массовой скорости и давления рассмотрим два разных подхода.

**Случай 1.** В сферической системе координат уравнения гидродинамики (1.3) имеют вид [12]

$$\frac{\partial P_e}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}\sigma_{rr} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + ctg\theta\, \sigma_{r\theta}\right) - \frac{1}{r}\left(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi}\right), \qquad (3.1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial P_e}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{3}{r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}\left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}\right), \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial U_r^e}{\partial r} + \frac{2}{r}U_r^e + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{ctg\theta}{r}U_\theta^e = 0. \qquad (3.3)$$

Здесь $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений и в сферической системе координат они равны [12]

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^e}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{r}\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial \theta} - U_r^e\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r}\mu_e\left(U_r^e + ctg\theta\, U_\theta^e\right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r}\right). \qquad (3.4)$$

Подставляя (1.10) в уравнение непрерывности (3.3) находим связь между функциями $G(y)$ и $g(y)$

$$g(y) = G(y) + \frac{1}{2}y\frac{dG}{dy}. \qquad (3.5)$$

С учетом (3.5) компоненты тензоров (3.4) можно выразить через функцию $G(y)$ и затем, после их подстановки в выражения (3.1)–(3.2), освобождаясь от давления, получаем следующее однородное уравнение 4-го порядка для функции $G(y)$:

$$y^3\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(1)}\frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d^4G}{dy^n}+y^2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(2)}\frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d^3G}{dy^3}+$$

$$+y\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(3)}\frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d^2G}{dy^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(4)}\frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{dG}{dy}=0, \tag{3.6}$$

в котором $\alpha_n^{(1)}=F_n$, $\alpha_n^{(3)}=\left(n^2-9n+8\right)F_n+A(10-2n)F_{n-1}+A^2F_{n-2}$, $\alpha_0^{(1)}=1$, $F_0=1$, $\alpha_0^{(2)}=8$, $\alpha_0^{(3)}=8$, $\alpha_0^{(4)}=-8$, $\alpha_n^{(2)}=2(4-n)F_n+2AF_{n-1}$, $\alpha_n^{(4)}=2\left(n^2-4\right)F_n+2A(1-2n)F_{n-1}+2A^2F_{n-2}$. Коэффициенты $F_n$ при $n<0$ равны нулю, а при $n\geq 1$ берутся из формулы (1.1), с краевыми условиями:

$$G(y)\big|_{y\to\infty}=L_0,\ G(y)\big|_{y=1}=L_1\ \left(L_0,L_1-const\right). \tag{3.7}$$

Точка $y=0$ для уравнения (3.7) является регулярно особой точкой [13, 14], поэтому его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$G(y)=\frac{1}{y^{\rho}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{y^n}\ \left(C_0\neq 0\right). \tag{3.8}$$

Вопрос о сходимости полученных в конечном итоге рядов для $C_n$ мы рассмотрим ниже. Подставляя (3.8) в (3.6), получаем следующее определяющее уравнение для $\rho$: $\rho(\rho+2)(\rho-3)(\rho-1)=0$. Корни этого уравнения равны соответственно: $\rho_1=3,\ \rho_2=1,\ \rho_3=0,\ \rho_4=-2$.

Большему из корней $\rho_1=3$ отвечает решение

$$G_1(y)=\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{y^n}\ \left(C_0^{(1)}=const\right). \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.6), воспользовавшись правилом перемножения степенных рядов и методом неопределенных коэффициентов, получаем следующую рекуррентную форму для определения коэффициентов $C_n^{(1)}$ ($n\geq 1$):

$$C_n^{(1)}=-\frac{1}{n(n+2)(n+3)(n+5)}\sum_{k=0}^{n-1}(k+3)\Big[(k+4)(k+5)(k+6)\alpha_{n-k}^{(1)}+$$
$$+(k+4)\alpha_{n-k}^{(3)}-(k+4)(k+5)\alpha_{n-k}^{(2)}-\alpha_{n-k}^{(4)}\Big]C_k^{(1)}\gamma_0^{n-k}. \tag{3.10}$$

Поскольку разность корней есть целое число, то согласно общей теории (см., например, [13, 14]) все остальные решения должны содержать логарифмические члены. Второе решение уравнения (3.6) $\left(\rho_2=1\right)$ ищем в виде:

$$G_2(y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(2)}}{y^n}+\omega_1\ln y\frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{y^n}\ \left(C_0^{(2)}=const\right). \tag{3.11}$$

Поступая аналогичным способом, находим рекуррентную формулу для коэффициентов $C_n^{(2)}$ $(n \geq 3)$:

$$C_n^{(2)} = -\frac{1}{n(n+1)(n+3)(n-2)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left[(k+2)(k+3)(k+4)\alpha_{n-k}^{(1)} + \right.\right.$$

$$+ (k+2)\alpha_{n-k}^{(3)} - (k+2)(k+3)\alpha_{n-k}^{(2)} - \alpha_{n-k}^{(4)}\Big]C_k^{(2)}\gamma_0^{n-k} -$$

$$-\omega_1\sum_{k=0}^{n-2}\Big[\left(4k^3 + 54k^2 + 238k + 342\right)\alpha_{n-k-2}^{(1)} - (k+2)(k+3)\alpha_{n-k}^{(2)} -$$

$$-\alpha_{n-k}^{(4)}\Big]C_k^{(2)}\gamma_0^{n-k} - \omega_1\sum_{k=0}^{n-2}\Big[\left(4k^3 + 54k^2 + 238k + 342\right)\alpha_{n-k-2}^{(1)} -$$

$$\left. - \left(3k^2 + 24k + 47\right)\alpha_{n-k-2}^{(2)} + (2k+7)\alpha_{n-k-2}^{(3)} - \alpha_{n-k-2}^{(4)}\Big]C_k^{(1)}\gamma_0^{n-k-2}\right\}. \qquad (3.12)$$

Третье решение очевидно, исходя из уравнения (3.6):

$$G_3(y) = const. \qquad (3.13)$$

Четвертое решение уравнения (3.14) $(\rho_4 = -2)$ имеет вид:

$$G_4(y) = y^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(4)}}{y^n} + \omega_2 \ln y \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(1)}}{y^n} \quad \left(C_0^{(4)} = const\right). \qquad (3.14)$$

Рекуррентную формулу для коэффициентов $C_n^{(4)}$ мы здесь не приводим, так как это решение не удовлетворяет краевому условию конечности решений для функции $G(y)$ при $y \to \infty$ (3.7).

Произвольные постоянные $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}$ выбираем таким образом, чтобы в пределе, когда мы переходим к малым относительным перепадам температуры, то есть безразмерный параметр $\gamma_0$, характеризующий нагрев поверхности частицы необходимо устремить к нулю, выражение для функции $G(y)$ переходило в известные выражения (см., например, [1]). Видим, при $\gamma_0 \to 0$ $C_0^{(1)} = 1$, $C_0^{(2)} = 1$.

При вычислении коэффициентов $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ по приведенным выше рекуррентным формулам необходимо учитывать, что $C_0^{(1)} = 1$, $C_1^{(2)} = \frac{\gamma_0}{8}\Big[24\alpha_1^{(1)} - 6\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(4)}\Big]$, $\omega_1 = \frac{\gamma_0}{30}\Big[\left(24\alpha_2^{(1)} - 6\alpha_2^{(2)} + 2\alpha_2^{(3)} - \alpha_2^{(4)}\right)\gamma_0 + 2\left(60\alpha_1^{(1)} - 12\alpha_1^{(2)} + 3\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(4)}\right)C_1^{(2)}\Big]$, $C_0^{(2)} = 1$, $C_2^{(2)} = 1$.

В приложении 1 приведены численные оценки значений коэффициентов $C_n^{(1)}$ и $C_n^{(2)}$, а также функций $G_1, G_1^{I}, G_1^{II}, G_1^{III}, G_1^{IV}$, $G_2, G_2^{I}, G_2^{II}, G_2^{III}, G_2^{IV}$, рассчитанные с двойной точностью с помощью математического пакета Maple VIII для воды.

Таким образом, нами получено общее решение однородного уравнения (3.6) в виде обобщенных степенных рядов, удовлетворяющее краевому условию на бесконечности $(y \to \infty)$ и оно имеет вид:

$$G(y) = 1 + A_1 G_1(y) + A_2 G_2(y). \tag{3.15}$$

и соответственно,

$$g(y) = G(y) + \frac{1}{2} y \frac{dG}{dy} = 1 + A_1 G_3(y) + A_2 G_4(y). \tag{3.16}$$

Здесь $G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(1)}}{y^n}$, $G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(2)}}{y^n} + \omega_1 \ln y \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(1)}}{y^n}$, $G_k(y) = G_{k-2}(y) + \frac{1}{2} y G_{k-2}^I(y)$ $(k = 3,4)$, $G_k^I(y)$ – первая производная по $y$ от соответствующей функции.

В дальнейшем нам потребуются первые вторые и третьи производные от функций $G_1(y)$ и $G_2(y)$

$$G_1^I(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3) C_n^{(1)}}{y^n}, \quad G_1^{II}(y) = \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+4) C_n^{(1)}}{y^n},$$

$$G_1^{III}(y) = -\frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+4)(n+5) C_n^{(1)}}{y^n},$$

$$G_2^I(y) = -\frac{1}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) C_n^{(2)}}{y^n} + \omega_1 \frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(1)}}{y^n} - \omega_1 \ln y \frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3) C_n^{(1)}}{y^n},$$

$$G_2^{II}(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) C_n^{(2)}}{y^n} - \omega_1 \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+7) C_n^{(1)}}{y^n} + \tag{3.17}$$

$$+ \omega_1 \ln y \frac{1}{y^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+4) C_n^{(1)}}{y^n},$$

$$G_2^{III}(y) = -\frac{1}{y^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3) C_n^{(2)}}{y^n} + \omega_1 \frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(3n^2 + 24n + 47\right) C_n^{(1)}}{y^n} -$$

$$- \omega_1 \ln y \frac{1}{y^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)(n+4)(n+5) C_n^{(1)}}{y^n}.$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 4-го порядка (3.6) формально получено в виде обобщенных степенных рядов (3.9), (3.11). Остановимся теперь на вопросе о сходимости полученных рядов. Из физических соображений ясно, что ряд (1.1) сходится. Как правило, три-четыре члена дают уже хорошее согласие с экспериментом. Пусть $R > 0$ – его радиус сходимости. Найдем радиус сходимости степенного ряда. Решение поставленной задачи может быть дано с помощью понятия о наибольшем пределе последовательности действительных неотрицательных чисел и формулы Коши-Адамара [15]. При этом мы получаем следующее выражение для радиуса сходимости обобщенных степенных рядов

$$\frac{T_{eS}}{T_{e\infty}} - 1 < 1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(F_n\right)^{\frac{1}{n}} = R \quad . \qquad (3.18)$$

Следовательно, решение уравнения (3.6) будет определено в замкнутом круге комплексной плоскости $\left|\frac{1}{y}\right| \le 1$ в том случае, если безразмерный параметр $\gamma_0$, характеризующий нагрев поверхности частицы, удовлетворяет неравенству (3.18).

Для реальных жидкостей первые три-четыре члена в формуле (1.1) дают значение коэффициента динамической вязкости с точностью до 2–3 процентов, и следовательно, следующие коэффициенты $F_n \ (n \ge 5)$ будут очень малы. Тогда величины уравнения (3.6) определены в круге $\left|\frac{1}{y}\right| \le 1$ при значительных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее.

Кроме того, следует заметить, что легко можно доказать теорему существования полученного решения (3.15). Действительно, функция (3.15) удовлетворяет уравнению (3.6) по построению. Обобщенные степенные ряды (3.9), (3.11) сходятся во всей области определения аргумента $y$ (см. выше). Краевые условия (3.7) однозначно (в силу линейной независимости решений $G_1(y)$ и $G_2(y)$) определяют значения коэффициентов $A_1$ и $A_2$.

Таким образом, для компонент массовой скорости и давления мы получили следующие выражения:

$$U_r^e(y,\theta) = U_\infty \cos\theta \left[1 + A_1G_1(y) + A_2G_2(y)\right], \qquad (3.19)$$

$$U_\theta^e(y,\theta) = -U_\infty \sin\theta \left[1 + A_1G_3(y) + A_2G_4(y)\right], \qquad (3.20)$$

$$P_e(y,\theta) = P_{e\infty} + \frac{\mu_e U_\infty}{R}\cos\theta\left\{\frac{y^2}{2}G^{III} + \right.$$

$$\left. + 3yG^{II} + 2G^I + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma_0^n}{y^n}\left(\frac{y}{2}G^{II} + G^I\right)\right\}. \qquad (3.21)$$

Здесь $s_n = AF_{n-1} - nF_n - \sum_{k=1}^{n} s_{n-k}F_k$. В частности, $s_0 = 0$; $s_1 = A - F_1$; $s_2 = F_1^2 - 2F_2$.

В случае когда нагрев поверхности гидрозольной частицы достаточно мал, то есть средняя температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры окружающей среды на бесконечности $(\gamma_0 \to 0)$, зависимостью коэффициента динамической вязкости можно пренебречь, и тогда $G_1 = \frac{1}{y^3}$, $G_1^I = -\frac{3}{y^4}$, $G_1^{II} = \frac{12}{y^5}$, $G_1^{III} = -\frac{60}{y^6}$, $G_2 = \frac{1}{y}$, $G_2^I = -\frac{1}{y^2}$, $G_2^{II} = \frac{2}{y^3}$, $G_2^{III} = -\frac{6}{y^4}$, $G_3 = -\frac{1}{2y^3}$ и $G_4 = \frac{1}{2y}$. Формулы (3.19)–(3.21) переходят в соответствующие формулы для компонент скорости и давления при малых относительных перепадах температуры [1, 12].

Поскольку выражения для компонентов массовой скорости и давления нами получены, следовательно, мы можем найти выражение для силы сопротивления, действующей на гидрозольную частицу со стороны окружающей ее жидкости. Она определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы и имеет следующий вид

$$F = \oint_S \left(-P_e\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta\right) dS\, n_z \big|_{r=R}, \tag{3.22}$$

где $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ – дифференциальный элемент поверхности в сферической системе координат, $n_z$ – единичный вектор в направлении оси $OZ$.

Подставляя в (3.22) выражения (3.19)–(3.21) и учитывая рекуррентные соотношения (3.9), (3.11), после интегрирования получаем

$$F = -4\pi R\mu_\infty U_\infty A_2 n_z \big|_{y=1}. \tag{3.23}$$

Постоянная интегрирования $A_2$ определяется из граничных условий на поверхности твердой гидрозольной частицы (1.6) и равна

$$A_2 = -\frac{G_1^I}{G_2 G_1^I - G_1 G_2^I}. \tag{3.24}$$

Отметим, что функции, входящие в выражение коэффициента $A_2$ $G_1$, $G_1^I$, $G_2$ и $G_2^I$ берутся при $y = 1$.

Подставляя явный вид коэффициента $A_2$ в формулу (3.23), получаем следующее выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы

$$F_z = 6\pi R\mu_\infty f_\mu U_\infty, \tag{3.25}$$

где $f_\mu = \frac{2}{3}\frac{G_1^I}{G_2 G_1^I - G_1 G_2^I}$.

Отметим, что сила $F_z$ вычислена в предположении о равномерном движении сферы, которое возможно только в том случае, когда полная сила, действующая на частицу, равна нулю. Поскольку сила (3.23) пропорциональна скорости и обращается в нуль вместе с ней, для реализации случая равномерного движения нагретой частицы следует предположить наличие некоторой сторонней силы, уравновешивающей силу (3.23).

В качестве примера рассмотрим гравитационное движение твердой частицы сферической формы. Частица, падающая под действием силы тяжести в вязкой жидкости, в конце концов, начинает двигаться с постоянной скоростью, при которой действие силы тяжести уравновешивается гидродинамическими силами. Сила тяжести, действующая на частицу, с учетом выталкивающей силы равна

$$F = \left(\rho_i - \rho_e\right)\frac{4}{3} g\pi\ R^3 , \tag{3.26}$$

где $g$ – ускорение свободного падения.

Приравнивая оба выражения (3.25) и (3.26), получаем скорость гравитационного падения твердой неравномерно нагретой сферы

$$U = h_\mu . \tag{3.27}$$

Здесь $h_\mu = \dfrac{2}{9} R^2 \dfrac{\rho_i - \rho_e}{\mu_\infty f_\mu} g$.

Таким образом, формулы (3.25) и (3.27) позволяют оценивать силу, действующую на неравномерно нагретую твердую гидрозольную частицу сферической формы (аналог формулы Стокса), и скорость ее гравитационного падения с учетом зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее и степенного вида зависимости коэффициента теплопроводности частицы.

**Случай 2.** Исходя из физических соображений, заключающихся в том, что жидкость действует на любую сферическую границу, описываемую уравнением $r = const$ с одинаковой силой, окружим сферу произвольным радиусом $r$. Общая сила, действующая на частицу в направлении оси *OZ*, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности этого произвольного радиуса и равна

$$F_z = \oint\limits_S \left(-P_e\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta\right) dS , \tag{3.28}$$

где $d\,S = r^2 \sin\theta\ d\theta\ d\varphi$ – дифференциальный элемент поверхности в сферической системе координат.

Подставляя в (3.28) выражение для давления (3.2) и компоненты тензора напряжений, предварительно выразив их через функцию $G(y)$, после интегрирования получаем следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $G(y)$ [5–6]

$$y^4 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(1)} \frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d^3 G}{d y^3} + y^3 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(2)} \frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d^2 G}{d y^2} +$$

$$+ y^2 \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(3)} \frac{\gamma_0^n}{y^n}\frac{d G}{d y} = D\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n^{(4)} \frac{\gamma_0^n}{y^n}. \tag{3.29}$$

в котором $\delta_n^{(1)} = F_n, \delta_n^{(3)} = -2(2+n)F_n + 2A\,F_{n-1}, \delta_0^{(1)} = 1, F_0 = 1, \delta_0^{(2)} = 4,$

$\delta_0^{(3)} = -4, \delta_0^{(4)} = 1, \delta_n^{(2)} = (4-n)F_n + AF_{n-1}, \delta_n^{(4)} = A^n / n!$. Коэффициенты $F_n$ при $n < 0$ равны нулю, а при $n \geq 1$ берутся из формулы (1.1), с краевыми условиями:

$$G(y)\big|_{y\to\infty} = L_0,\quad G(y)\big|_{y=1} = L_1 \quad (L_0, L_1 - const). \tag{3.30}$$

Точка $y = 0$ для однородного уравнения (3.29) также является регулярно особой точкой [13, 14], поэтому его решение ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$G(y) = \frac{1}{y^\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n}{y^n} \quad (\Delta_0 \neq 0), \tag{3.31}$$

и характеристическое уравнение имеет вид $\rho(\rho+2)(\rho-3) = 0$, корни которого равны соответственно: $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = -2$, $\rho_3 = 3$.

Найдем все решения уравнения (3.29), удовлетворяющие конечности решения при $y \to \infty$, которые в нашем случае имеют следующий вид:

$$\widetilde{G}_1(y) = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(1)}}{y^n} \quad (\Delta_0^{(1)} = 1), \tag{3.32}$$

$$\widetilde{G}_3(y) = const. \tag{3.33}$$

$$\widetilde{G}_2(y) = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(2)}}{y^n} + \omega_2 \ln y \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n^{(1)}}{y^n} \quad (\Delta_0^{(2)} = 1), \tag{3.34}$$

где коэффициенты $\Delta_n^{(1)}$ $(n \geq 1)$ и $\Delta_n^{(2)}$ $(n \geq 3)$ определяются из следующих рекуррентных соотношений

$$\Delta_n^{(1)} = -\frac{1}{n(n+3)(n+5)}\sum_{k=0}^{n-1}(k+3)\Big[(k+4)(k+5)\delta_{n-k}^{(1)} -$$
$$-(k+4)\delta_{n-k}^{(2)} + \delta_{n-k}^{(3)}\Big]\Delta_k^{(1)}\gamma_0^{n-k}, \tag{3.35}$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)}\Bigg\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Big[(k+2)(k+3)\delta_{n-k}^{(1)} -$$
$$-(k+2)\delta_{n-k}^{(2)} + \delta_{n-k}^{(3)}\Big]\Delta_k^{(2)}\gamma_0^{n-k} - \omega_2\sum_{k=0}^{n-2}\Big[(3k^2+24k+47)\delta_{n-k-2}^{(1)} -$$
$$-(2k-7)\delta_{n-k-2}^{(2)} + \delta_{n-k-2}^{(3)}\Big]\Delta_k^{(1)}\gamma_0^{n-k-2} + 6\delta_n^{(4)}\gamma_0^n\Bigg\}. \tag{3.36}$$

При вычислении коэффициентов $\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}$ по приведенным выше рекуррентным формулам необходимо учитывать, что $\Delta_0^{(1)} = 1$, $\Delta_0^{(2)} = 1$, $\Delta_2^{(2)} = 1$, $D = 6$, $\Delta_1^{(2)} =$ $= \frac{\gamma_0}{8}\Big[6\delta_1^{(1)} - 2\delta_1^{(2)} + \delta_1^{(3)} + 6\delta_1^{(4)}\Big]$,

$$\omega_2 = \frac{\gamma_0}{15}\left[\left(6\delta_2^{(1)} - 2\delta_2^{(2)} + \delta_2^{(3)} + 6\delta_2^{(4)}\right)\gamma_0 + 2\left(12\delta_1^{(1)} - 3\delta_1^{(2)} + \delta_1^{(3)}\right)\Delta_1^{(2)}\right].$$

В приложении II приведены численные оценки значения коэффициентов $\Delta_n^{(1)}$ и $\Delta_n^{(2)}$, а также функций $\tilde{G}_1, \tilde{G}_1^I, \tilde{G}_1^{II}, \tilde{G}_1^{III}$, $\tilde{G}_2, \tilde{G}_2^I, \tilde{G}_2^{II}, \tilde{G}_2^{III}$, рассчитанные с двойной точностью с помощью математического пакета Maple VIII для воды.

Таким образом, нами получено общее решение неоднородного уравнения (3.29) в виде обобщенных степенных рядов, удовлетворяющее краевому условию на бесконечности $(y \to \infty)$ и оно имеет вид:

$$\tilde{G}(y) = 1 + A_1 \tilde{G}_1(y) + A_2 \tilde{G}_2(y), \tag{3.37}$$

и для компонент массовой скорости и давления мы имеем следующие выражения:

$$U_r^e(y,\theta) = U_\infty \cos\theta \left[1 + A_1\tilde{G}_1(y) + A_2\tilde{G}_2(y)\right], \tag{3.38}$$

$$U_\theta^e(y,\theta) = -U_\infty \sin\theta \left[1 + A_1\tilde{G}_3(y) + A_2\tilde{G}_4(y)\right], \tag{3.39}$$

$$P_e(y,\theta) = P_{e\infty} + \frac{\mu_e U_\infty}{R}\cos\theta \left\{\frac{y^2}{2}\tilde{G}^{III} + \right.$$

$$\left. + 3y\tilde{G}^{II} + 2\tilde{G}^I + + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{\gamma_0^n}{y^n}\left(\frac{y}{2}\tilde{G}^{II} + \tilde{G}^I\right)\right\}. \tag{3.40}$$

Здесь $s_n = AF_{n-1} - nF_n - \sum_{k=1}^{n} s_{n-k}F_k$. В частности, $s_0 = 0$; $s_1 = A - F_1$; $s_2 = F_1^2 - 2F_2$. $\tilde{G}_k(y) = \tilde{G}_{k-2}(y) + \frac{1}{2}y\tilde{G}_{k-2}^I(y)$ $(k = 3,4)$, $\tilde{G}_k^I(y)$ – первая производная по $y$ от соответствующей функции.

Постоянные интегрирования $A_1$ и $A_2$, входящие в (3.38)–(3.39), определяются из граничных условий на поверхности твердой гидрозольной частицы (1.6), в частности, для $A_2$ имеем

$$A_2 = -\frac{\tilde{G}_1^I}{\tilde{G}_2\tilde{G}_1^I - \tilde{G}_1\tilde{G}_2^I}. \tag{3.41}$$

Отметим, что функции, входящие в выражение коэффициента $A_2$ $\tilde{G}_1, \tilde{G}_1^I, \tilde{G}_2$ и $\tilde{G}_2^I$ берутся при $y = 1$.

Подставляя явный вид коэффициента $A_2$ в формулу (3.23), получаем следующее выражение для силы сопротивления неравномерно нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы

$$F_z = 6\pi R\mu_\infty f_\mu^* U_\infty, \tag{3.42}$$

где $f_\mu^* = \dfrac{2}{3}\dfrac{\widetilde{G}_1^I}{\widetilde{G}_2\widetilde{G}_1^I - \widetilde{G}_1\widetilde{G}_2^I}$.

Ниже в таблице приведено сравнение коэффициентов $f_\mu$ и $f_\mu^*$, которые рассчитаны двумя методами:

| $t_S(^oC)$ | $f_\mu$ | $f_\mu^*$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.000000 | 1.000000 |
| 10 | 0.883948 | 0.883948 |
| 20 | 0.782683 | 0.782683 |
| 30 | 0.695465 | 0.695465 |
| 40 | 0.621155 | 0.621155 |
| 50 | 0.558311 | 0.558311 |
| 60 | 0.505330 | 0.505330 |
| 70 | 0.460602 | 0.460602 |
| 80 | 0.422628 | 0.422628 |
| 90 | 0.390095 | 0.390095 |

**Заключение.** Из приведенной выше таблицы и численного сравнения (Приложения 1 и 2) получено, что оба метода дают достаточно хорошее совпадение. Однако в случае сложной геометрии разделение переменных непосредственно в уравнении Навье-Стокса может привести к значительным трудностям. Это связано с зависимостью коэффициентов Ламе от переменных задачи. Использование же второго подхода может существенно упростить процедуру. Во-первых, мы интегрируем по одной из переменной задачи, во-вторых, порядок уравнения уменьшается как минимум на единицу.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**

| $t_S(^oC)$ | $\mu_{eS}$ | $\gamma_o = \dfrac{T_{eS}}{T_{e\infty}} - 1$ | $\lambda_{eS}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.001753 | 0.000000 | 0.5690 |
| 10 | 0.001299 | 0.036600 | 0.5860 |
| 20 | 0.001002 | 0.073260 | 0.6020 |
| 30 | 0.000797 | 0.109890 | 0.6170 |
| 40 | 0.000651 | 0.146520 | 0.6300 |
| 50 | 0.000544 | 0.183150 | 0.6430 |
| 60 | 0.000463 | 0.219780 | 0.6530 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 70 | 0.000401 | 0.256410 | 0.6620 |
| 80 | 0.000351 | 0.293040 | 0.6690 |
| 90 | 0.000311 | 0.329670 | 0.6750 |

Вода

| $A$ | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ |
|---|---|---|---|
| 5.779 | 1.0 | -2.31800 | 9.11800 |

$t_S\left({}^oC\right) = 10$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | c1(0)=1 | c2(0)=1 |
| 10 | c1(10)= -3.960983990495706D-12 | c2(10)= -2.330301303478325D-10 |
| 20 | c1(20)= -6.380979788074173D-22 | c2(20)=3.281707765177027D-20 |
| 30 | c1(30)= -7.360952073950913D-32 | c2(30)=7.696592558190793D-30 |
| 40 | c1(40)= -3.085635538942261D-42 | c2(40)=1.040828016310561D-39 |
| 50 | c1(50)=1.341417832254586D-51 | c2(50)=4.567039658369969D-50 |
| 60 | c1(60)=4.692619783364436D-61 | c2(60)= -2.282001809878747D-59 |
| 70 | c1(70)=8.065429056905055D-71 | c2(70)= -8.19028204756627D-69 |
| 80 | c1(80)=3.615418712427417D-81 | c2(80)= -1.436349892246981D-78 |
| 90 | c1(90)= -2.620240706660161D-90 | c2(90)= -6.171801422782097D-89 |
| 100 | c1(100)= -9.926748636855478D-100 | c2(100)=5.005534220305421D-98 |
| 110 | c1(110)= -1.823633740723708D-109 | c2(110)=1.895751043255582D-107 |
| 120 | c1(120)= -6.669528649083853D-120 | c2(120)=3.486658143419989D-117 |
| 130 | c1(130)=7.692584726179247D-129 | c2(130)=1.169652607541748D-127 |
| 140 | c1(140)=2.915955703846325D-138 | c2(140)= -1.540138440244173D-136 |
| 150 | c1(150)=5.383669436180874D-148 | c2(150)= -5.798389886955928D-146 |
| 160 | c1(160)=1.305633086374718D-158 | c2(160)= -1.065000479579171D-155 |
| 170 | c1(170)= -2.717099845560136D-167 | c2(170)= -2.188077220964749D-166 |
| 180 | c1(180)= -1.006943456163676D-176 | c2(180)=5.577882241186769D-175 |
| 190 | c1(190)= -1.825385950228149D-186 | c2(190)=2.048466055379312D-184 |
| 200 | c1(200)= -1.706202929725771D-197 | c2(200)=3.682719685127099D-194 |
| 210 | c1(210)=1.065904616783787D-205 | c2(210)=1.868249526083038D-205 |
| 220 | c1(220)=3.827708092824656D-215 | c2(220)= -2.222083955682125D-213 |
| 230 | c1(230)=6.72991214125652D-225 | c2(230)= -7.900678673433859D-223 |
| 240 | c1(240)= -5.255782082800712D-236 | c2(240)= -1.374858043270205D-232 |
| 250 | c1(250)= -4.471751932373763D-244 | c2(250)=1.740315181121199D-243 |
| 260 | c1(260)= -1.550070880020502D-253 | c2(260)=9.418581773060214D-252 |
| 270 | c1(270)= -2.621790268333677D-263 | c2(270)=3.231490890085373D-261 |
| 280 | c1(280)=7.15644175601903D-274 | c2(280)=5.401210600825072D-271 |
| 290 | c1(290)=1.9648292021318D-282 | c2(290)= -1.770890164112551D-281 |
| 300 | c1(300)=6.563097980447245D-292 | c2(300)= -4.168642094784342D-290 |

$t_S\left({}^oC\right) = 30$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | c1(0)=1 | c2(0)=1 |
| 10 | c1(10)= -2.338921436547811D-07 | c2(10)= -1.261238477271564D-06 |
| 20 | c1(20)= -2.224910078815328D-12 | c2(20)=1.21423410893943D-11 |
| 30 | c1(30)= -1.515554755800204D-17 | c2(30)=1.616845945631315D-16 |
| 40 | c1(40)= -3.751412461103665D-23 | c2(40)=1.260117181538186D-21 |
| 50 | c1(50)=9.630011624295317D-28 | c2(50)=2.905427593378379D-27 |
| 60 | c1(60)=1.989255879620118D-32 | c2(60)= -1.018908853014337D-31 |
| 70 | c1(70)=2.018902314392424D-37 | c2(70)= -2.085189122484906D-36 |
| 80 | c1(80)=5.34390807726615D-43 | c2(80)= -2.10751671749738D-41 |

| | | |
|---|---|---|
| 90 | c1(90)= -2.286936542735014D-47 | c2(90)= -4.557073164770434D-47 |
| 100 | c1(100)= -5.116023101392414D-52 | c2(100)=2.704937204082053D-51 |
| 110 | c1(110)= -5.549778345699271D-57 | c2(110)=5.856968212145756D-56 |
| 120 | c1(120)= -1.198521167797799D-62 | c2(120)=6.204156056083742D-61 |
| 130 | c1(130)=8.162729442139059D-67 | c2(130)=9.588045148384288D-67 |
| 140 | c1(140)=1.827075874774559D-71 | c2(140)= -1.008115771948431D-70 |
| 150 | c1(150)=1.991895698622459D-76 | c2(150)= -2.174523808005141D-75 |
| 160 | c1(160)=2.852475364190589D-82 | c2(160)= -2.298254765597426D-80 |
| 170 | c1(170)= -3.505249210157696D-86 | c2(170)= -1.658008077030954D-86 |
| 180 | c1(180)= -7.670628212268709D-91 | c2(180)=4.424661833867541D-90 |
| 190 | c1(190)= -8.210944190046775D-96 | c2(190)=9.326031069741112D-95 |
| 200 | c1(200)= -4.531913659961721D-102 | c2(200)=9.636894119761362D-100 |
| 210 | c1(210)=1.671790428415798D-105 | c2(210)= -2.431227667808006D-106 |
| 220 | c1(220)=3.544988647210219D-110 | c2(220)= -2.136921887543407D-109 |
| 230 | c1(230)=3.680425067932128D-115 | c2(230)= -4.366820543011897D-114 |
| 240 | c1(240)= -1.697221336235211D-121 | c2(240)= -4.36169088006874D-119 |
| 250 | c1(250)= -8.526904191135438D-125 | c2(250)=5.966198310509678D-125 |
| 260 | c1(260)= -1.745330928262856D-129 | c2(260)=1.098382309494021D-128 |
| 270 | c1(270)= -1.743157871649449D-134 | c2(270)=2.168435664110256D-133 |
| 280 | c1(280)= 2.809625672574169D-140 | c2(280)=2.076794478241313D-138 |
| 290 | c1(290)=4.55500305809283D-144 | c2(290)= -5.47819507439252D-144 |
| 300 | c1(300)=8.984321897498408D-149 | c2(300)= -5.896587672693918D-148 |

$t_S\left({}^{o}C\right)=$ 50

| | | |
|---|---|---|
| 0 | c1(0)=1 | c2(0)=1 |
| 10 | c1(10)= -3.868148428218461D-05 | c2(10)= -4.321785821226093D-05 |
| 20 | c1(20)= -6.085376537393719D-08 | c2(20)=1.083006244409308D-07 |
| 30 | c1(30)= -6.85542083713308D-11 | c2(30)=2.164278345562024D-10 |
| 40 | c1(40)= -2.806369174270222D-14 | c2(40)=2.607844343836074D-13 |
| 50 | c1(50)=1.191418370409439D-16 | c2(50)=6.370640405053315D-17 |
| 60 | c1(60)=4.070198851017712D-19 | c2(60)= -6.68105973381635D-19 |
| 70 | c1(70)=6.831684144940695D-22 | c2(70)= -2.070517632169733D-21 |
| 80 | c1(80)=2.990604265181346D-25 | c2(80)= -3.232843334479608D-24 |
| 90 | c1(90)= -2.116613586690925D-27 | c2(90)= -5.666595389174199D-28 |
| 100 | c1(100)= -7.830823915571164D-30 | c2(100)=1.312591278500934D-29 |
| 110 | c1(110)= -1.404876331541861D-32 | c2(110)=4.329029851308737D-32 |
| 120 | c1(120)= -5.017595679773027D-36 | c2(120)=7.066961150795861D-35 |
| 130 | c1(130)=5.651618680528367D-38 | c2(130)=2.949395713789078D-39 |
| 140 | c1(140)=2.09209561591756D-40 | c2(140)= -3.626957120565923D-40 |
| 150 | c1(150)=3.772063856676298D-43 | c2(150)= -1.197230392819728D-42 |
| 160 | c1(160)=8.933504096233102D-47 | c2(160)= -1.943970970059084D-45 |
| 170 | c1(170)= -1.815542145252488D-48 | c2(170)=2.42177469484944D-49 |
| 180 | c1(180)= -6.570612633526586D-51 | c2(180)=1.181558573039872D-50 |
| 190 | c1(190)= -1.163203036801292D-53 | c2(190)=3.825792056612858D-53 |
| 200 | c1(200)= -1.061772689881468D-57 | c2(200)=6.05022988672548D-56 |
| 210 | c1(210)=6.477676479480552D-59 | c2(210)= -1.925681058295235D-59 |
| 220 | c1(220)=2.271641344150543D-61 | c2(220)= -4.23897487577818D-61 |
| 230 | c1(230)=3.900411173114689D-64 | c2(230)= -1.334904794782975D-63 |

| | | |
|---|---|---|
| 240 | c1(240)= -2.974667240630634D-68 | c2(240)= -2.031031866396838D-66 |
| 250 | c1(250)= -2.471603419171076D-69 | c2(250)=1.098189072464525D-69 |
| 260 | c1(260)= -8.366670870125161D-72 | c2(260)=1.619570526041792D-71 |
| 270 | c1(270)= -1.381971598720414D-74 | c2(270)=4.939806706724116D-74 |
| 280 | c1(280)=3.683819607478088D-78 | c2(280)=7.165679581706576D-77 |
| 290 | c1(290)=9.877022921329736D-80 | c2(290)= -5.707485482872018D-80 |
| 300 | c1(300)=3.221886140792124D-82 | c2(300)= -6.466141249470514D-82 |

$t_S\left(^{o}C\right) = 70$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | c1(0)=1 | c2(0)=1 |
| 10 | c1(10)= -1.118879939000289D-03 | c2(10)=6.77634849910286D-05 |
| 20 | c1(20)= -5.09152838489693D-05 | c2(20)=3.902271745145637D-05 |
| 30 | c1(30)= -1.659110036582558D-06 | c2(30)=1.804429819284202D-06 |
| 40 | c1(40)= -1.964564212540305D-08 | c2(40)=5.104483525048385D-08 |
| 50 | c1(50)=2.412493078893729D-09 | c2(50)= -3.599455053435892D-10 |
| 60 | c1(60)=2.383953434088349D-10 | c2(60)= -1.627087138848302D-10 |
| 70 | c1(70)=1.157418118194748D-11 | c2(70)= -1.180799408935928D-11 |
| 80 | c1(80)=1.465553924009058D-13 | c2(80)= -4.283470147247552D-13 |
| 90 | c1(90)= -3.000300750333977D-14 | c2(90)=6.226135881469554D-15 |
| 100 | c1(100)= -3.210783528285819D-15 | c2(100)=2.1875631935869D-15 |
| 110 | c1(110)= -1.666180396483899D-16 | c2(110)=1.704161477820845D-16 |
| 120 | c1(120)= -1.721313378126934D-18 | c2(120)=6.373903324674671D-18 |
| 130 | c1(130)=5.608122482271295D-19 | c2(130)=-1.441584954897509D-19 |
| 140 | c1(140)=6.004910299305172D-20 | c2(140)= -4.150100433864225D-20 |
| 150 | c1(150)=3.131730543525323D-21 | c2(150)= -3.259152976833891D-21 |
| 160 | c1(160)=2.145396409186425D-23 | c2(160)= -1.192341479630606D-22 |
| 170 | c1(170)= -1.261166424526778D-23 | c2(170)=3.789303554814633D-24 |
| 180 | c1(180)= -1.32023817541282D-24 | c2(180)=9.300448663472815D-25 |
| 190 | c1(190)= -6.760554313388212D-26 | c2(190)=7.206165815996767D-26 |
| 200 | c1(200)= -1.785001914295726D-28 | c2(200)=2.516077672237465D-27 |
| 210 | c1(210)=3.149972383704614D-28 | c2(210)= -1.068208092766641D-28 |
| 220 | c1(220)=3.195270379806822D-29 | c2(220)= -2.298601262821265D-29 |
| 230 | c1(230)=1.586933023854606D-30 | c2(230)= -1.740027953542111D-30 |
| 240 | c1(240)= -3.500797204076411D-33 | c2(240)= -5.701188091598046D-32 |
| 250 | c1(250)= -8.413713255233161D-33 | c2(250)=3.146441836637723D-33 |
| 260 | c1(260)= -8.238382677190382D-34 | c2(260)=6.056853817387392D-34 |
| 270 | c1(270)= -3.936123812961953D-35 | c2(270)=4.455695156947886D-35 |
| 280 | c1(280)=3.034927668871912D-37 | c2(280)=1.3493300051081D-36 |
| 290 | c1(290)=2.353728729302448D-37 | c2(290)= -9.549315144475988D-38 |
| 300 | c1(300)=2.220858517457498D-38 | c2(300)= -1.669304374746064D-38 |

| $t_S\left(^{o}C\right)$ | $G_1$ | $G_1^{I}$ | $G_1^{II}$ | $G_1^{III}$ | $G_1^{IV}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.000000 | -3.000000 | 12.000000 | -60.000 | 360.000 |
| 10 | 1.076306 | -3.307234 | 13.545883 | -69.332 | 425.699 |
| 20 | 1.156270 | -3.631617 | 15.187438 | -79.280 | 495.886 |
| 30 | 1.238649 | -3.965269 | 16.866869 | -89.364 | 566.115 |
| 40 | 1.321972 | -4.299051 | 18.519489 | -99.074 | 631.954 |
| 50 | 1.404733 | -4.624279 | 20.089775 | -108.028 | 690.714 |
| 60 | 1.485619 | -4.934437 | 21.545129 | -116.090 | 742.350 |
| 70 | 1.563684 | -5.226199 | 22.880850 | -123.369 | 788.999 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 1.638427 | -5.499488 | 24.115692 | -130.136 | 833.784 |
| 90 | 1.709776 | -5.756815 | 25.299281 | -151.826 | 14527.714 |

| $t_S\left({}^oC\right)$ | $G_2$ | $G_2^I$ | $G_2^{II}$ | $G_2^{III}$ | $G_2^{IV}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000 | -4.000000 | 14.000000 | -66.000 | 384.000 |
| 10 | 2.298421 | -4.745051 | 16.832848 | -80.349 | 474.023 |
| 20 | 2.598535 | -5.486241 | 19.625077 | -94.394 | 561.665 |
| 30 | 2.897303 | -6.206364 | 22.264780 | -107.302 | 639.887 |
| 40 | 3.191918 | -6.889841 | 24.654329 | -118.382 | 703.293 |
| 50 | 3.480281 | -7.526013 | 26.736197 | -127.315 | 750.207 |
| 60 | 3.761376 | -8.111381 | 28.506477 | -134.221 | 782.889 |
| 70 | 4.035448 | -8.649929 | 30.010096 | -139.558 | 805.906 |
| 80 | 4.303932 | -9.151680 | 31.323064 | -143.924 | 824.085 |
| 90 | 4.569214 | -9.630390 | 32.521590 | -138.048 | -8060.832 |

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

$t_S\left({}^oC\right) = 10$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | d1(0)=1 | d2(0)=1 |
| 10 | d1(10)= -3.960983990495713D-12 | d2(10)= -2.330301303478321D-10 |
| 20 | d1(20)= -6.380979788074177D-22 | d2(20)=3.281707765177025D-20 |
| 30 | d1(30)= -7.36095207395091D-32 | d2(30)=7.696592558190787D-30 |
| 40 | d1(40)= -3.085635538942257D-42 | d2(40)=1.04082801631056D-39 |
| 50 | d1(50)=1.341417832254586D-51 | d2(50)=4.56703965836995D-50 |
| 60 | d1(60)=4.692619783364435D-61 | d2(60)= -2.282001809878747D-59 |
| 70 | d1(70)=8.06542905690505D-71 | d2(70)= -8.190282047566261D-69 |
| 80 | d1(80)=3.615418712427421D-81 | d2(80)= -1.436349892246979D-78 |
| 90 | d1(90)= -2.620240706660159D-90 | d2(90)= -6.171801422782073D-89 |
| 100 | d1(100)= -9.926748636855478D-100 | d2(100)=5.00553422030542D-98 |
| 110 | d1(110)= -1.823633740723709D-109 | d2(110)=1.89575104325558D-107 |
| 120 | d1(120)= -6.669528649083872D-120 | d2(120)=3.48665814341998D-117 |
| 130 | d1(130)=7.692584726179248D-129 | d2(130)=1.169652607541737D-127 |
| 140 | d1(140)=2.915955703846327D-138 | d2(140)= -1.540138440244172D-136 |
| 150 | d1(150)=5.383669436180881D-148 | d2(150)= -5.79838988695592D-146 |
| 160 | d1(160)=1.305633086374728D-158 | d2(160)= -1.065000479579168D-155 |
| 170 | d1(170)= -2.717099845560137D-167 | d2(170)= -2.188077220964722D-166 |
| 180 | d1(180)= -1.006943456163678D-176 | d2(180)=5.577882241186763D-175 |
| 190 | d1(190)= -1.825385950228151D-186 | d2(190)=2.048466055379308D-184 |
| 200 | d1(200)= -1.706202929725791D-197 | d2(200)=3.682719685127089D-194 |
| 210 | d1(210)=1.065904616783788D-205 | d2(210)=1.868249526082938D-205 |
| 220 | d1(220)=3.827708092824657D-215 | d2(220)= -2.222083955682124D-213 |
| 230 | d1(230)=6.729912141256519D-225 | d2(230)= -7.900678673433846D-223 |
| 240 | d1(240)= -5.25578208280086D-236 | d2(240)= -1.374858043270203D-232 |
| 250 | d1(250)= -4.471751932373766D-244 | d2(250)=1.740315181121233D-243 |
| 260 | d1(260)= -1.550070880020503D-253 | d2(260)=9.418581773060214D-252 |
| 270 | d1(270)= -2.621790268333674D-263 | d2(270)=3.231490890085369D-261 |
| 280 | d1(280)=7.156441756019184D-274 | d2(280)=5.401210600825061D-271 |
| 290 | d1(290)=1.964829202131803D-282 | d2(290)= -1.770890164112559D-281 |
| 300 | d1(300)=6.563097980447249D-292 | d2(300)= -4.168642094784342D-290 |

$t_S\left({}^{o}C\right) = 30$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | d1(0)=1 | d2(0)=1 |
| 10 | d1(10)= -2.338921436547809D-07 | d2(10)= -1.261238477271565D-06 |
| 20 | d1(20)= -2.224910078815328D-12 | d2(20)=1.214234108939431D-11 |
| 30 | d1(30)= -1.515554755800204D-17 | d2(30)=1.616845945631315D-16 |
| 40 | d1(40)= -3.751412461103664D-23 | d2(40)=1.260117181538187D-21 |
| 50 | d1(50)=9.630011624295315D-28 | d2(50)=2.905427593378381D-27 |
| 60 | d1(60)=1.989255879620117D-32 | d2(60)= -1.018908853014338D-31 |
| 70 | d1(70)=2.018902314392423D-37 | d2(70)= -2.085189122484907D-36 |
| 80 | d1(80)=5.343908077266144D-43 | d2(80)= -2.107516717497382D-41 |
| 90 | d1(90)= -2.286936542735015D-47 | d2(90)= -4.557073164770448D-47 |
| 100 | d1(100)= -5.116023101392413D-52 | d2(100)=2.704937204082055D-51 |
| 110 | d1(110)= -5.549778345699271D-57 | d2(110)=5.856968212145761D-56 |
| 120 | d1(120)= -1.198521167797796D-62 | d2(120)=6.204156056083747D-61 |
| 130 | d1(130)=8.162729442139072D-67 | d2(130)=9.588045148384319D-67 |
| 140 | d1(140)=1.827075874774561D-71 | d2(140)= -1.008115771948431D-70 |
| 150 | d1(150)=1.991895698622461D-76 | d2(150)= -2.174523808005144D-75 |
| 160 | d1(160)=2.852475364190584D-82 | d2(160)= -2.298254765597429D-80 |
| 170 | d1(170)= -3.505249210157702D-86 | d2(170)= -1.658008077030949D-86 |
| 180 | d1(180)= -7.67062821226872D-91 | d2(180)=4.424661833867551D-90 |
| 190 | d1(190)= -8.210944190046782D-96 | d2(190)=9.326031069741128D-95 |
| 200 | d1(200)= -4.531913659961665D-102 | d2(200)=9.63689411976136D-100 |
| 210 | d1(210)=1.671790428415803D-105 | d2(210)= -2.431227667808312D-106 |
| 220 | d1(220)=3.544988647210226D-110 | d2(220)= -2.136921887543413D-109 |
| 230 | d1(230)=3.680425067932132D-115 | d2(230)= -4.366820543011903D-114 |
| 240 | d1(240)= -1.697221336235267D-121 | d2(240)= -4.36169088006874D-119 |
| 250 | d1(250)= -8.526904191135456D-125 | d2(250)=5.966198310509822D-125 |
| 260 | d1(260)= -1.745330928262859D-129 | d2(260)=1.098382309494024D-128 |
| 270 | d1(270)= -1.743157871649454D-134 | d2(270)=2.168435664110261D-133 |
| 280 | d1(280)=2.809625672574191D-140 | d2(280)=2.076794478241314D-138 |
| 290 | d1(290)=4.555003058092844D-144 | d2(290)= -5.4781950743926D-144 |
| 300 | d1(300)=8.984321897498439D-149 | d2(300)= -5.896587672693937D-148 |

$t_S\left({}^{o}C\right) = 50$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | d1(0)=1 | d2(0)=1 |
| 10 | d1(10)= -3.868148428218461D-05 | d2(10)=-4.321785821226063D-05 |
| 20 | d1(20)= -6.085376537393718D-08 | d2(20)=1.083006244409309D-07 |
| 30 | d1(30)= -6.855420837133077D-11 | d2(30)=2.164278345562025D-10 |
| 40 | d1(40)= -2.806369174270216D-14 | d2(40)=2.607844343836073D-13 |
| 50 | d1(50)=1.191418370409439D-16 | d2(50)=6.370640405053258D-17 |
| 60 | d1(60)=4.070198851017711D-19 | d2(60)= -6.681059733816357D-19 |
| 70 | d1(70)=6.831684144940695D-22 | d2(70)= -2.070517632169732D-21 |
| 80 | d1(80)=2.990604265181352D-25 | d2(80)= -3.232843334479601D-24 |
| 90 | d1(90)= -2.116613586690924D-27 | d2(90)= -5.666595389174064D-28 |
| 100 | d1(100)= -7.830823915571158D-30 | d2(100)=1.312591278500937D-29 |
| 110 | d1(110)= -1.404876331541859D-32 | d2(110)=4.329029851308738D-32 |
| 120 | d1(120)= -5.017595679773024D-36 | d2(120)=7.066961150795855D-35 |
| 130 | d1(130)=5.651618680528358D-38 | d2(130)=2.949395713788723D-39 |
| 140 | d1(140)=2.092095615917556D-40 | d2(140)= -3.626957120565931D-40 |

| | | |
|---|---|---|
| 150 | d1(150)=3.772063856676289D-43 | d2(150)= -1.197230392819728D-42 |
| 160 | d1(160)=8.933504096233019D-47 | d2(160)= -1.943970970059081D-45 |
| 170 | d1(170)= -1.815542145252484D-48 | d2(170)=2.421774694849551D-49 |
| 180 | d1(180)= -6.570612633526574D-51 | d2(180)=1.181558573039874D-50 |
| 190 | d1(190)= -1.163203036801289D-53 | d2(190)=3.825792056612861D-53 |
| 200 | d1(200)= -1.061772689881451D-57 | d2(200)=6.050229886725481D-56 |
| 210 | d1(210)=6.477676479480542D-59 | d2(210)= -1.925681058295266D-59 |
| 220 | d1(220)=2.271641344150539D-61 | d2(220)= -4.238974875778191D-61 |
| 230 | d1(230)=3.900411173114678D-64 | d2(230)= -1.334904794782977D-63 |
| 240 | d1(240)= -2.97466724063072D-68 | d2(240)= -2.031031866396838D-66 |
| 250 | d1(250)= -2.471603419171074D-69 | d2(250)=1.098189072464537D-69 |
| 260 | d1(260)= -8.366670870125143D-72 | d2(260)=1.619570526041795D-71 |
| 270 | d1(270)= -1.381971598720409D-74 | d2(270)=4.939806706724124D-74 |
| 280 | d1(280)=3.68381960747814D-78 | d2(280)=7.165679581706582D-77 |
| 290 | d1(290)=9.877022921329722D-80 | d2(290)= -5.707485482872051D-80 |
| 300 | d1(300)=3.221886140792117D-82 | d2(300)= -6.466141249470527D-82 |

$t_S\left({}^{o}C\right) =$ 70

| | | |
|---|---|---|
| 0 | d1(0)=1 | d2(0)=1 |
| 10 | d1(10)= -1.118879939000288D-03 | d2(10)=6.776348499102985D-05 |
| 20 | d1(20)= -5.09152838489693D-05 | d2(20)=3.902271745145639D-05 |
| 30 | d1(30)= -1.659110036582558D-06 | d2(30)=1.804429819284202D-06 |
| 40 | d1(40)= -1.964564212540305D-08 | d2(40)=5.104483525048382D-08 |
| 50 | d1(50)=2.412493078893729D-09 | d2(50)= -3.599455053435897D-10 |
| 60 | d1(60)=2.383953434088349D-10 | d2(60)= -1.627087138848301D-10 |
| 70 | d1(70)=1.157418118194748D-11 | d2(70)= -1.180799408935927D-11 |
| 80 | d1(80)=1.465553924009063D-13 | d2(80)= -4.283470147247551D-13 |
| 90 | d1(90)= -3.000300750333974D-14 | d2(90)= 6.226135881469525D-15 |
| 100 | d1(100)= -3.210783528285819D-15 | d2(100)=2.187563193586896D-15 |
| 110 | d1(110)= -1.6661803964839D-16 | d2(110)=1.704161477820843D-16 |
| 120 | d1(120)= -1.72131337812694D-18 | d2(120)=6.373903324674671D-18 |
| 130 | d1(130)=5.6081224822713D-19 | d2(130)= -1.441584954897498D-19 |
| 140 | d1(140)=6.004910299305178D-20 | d2(140)= -4.150100433864215D-20 |
| 150 | d1(150)=3.131730543525326D-21 | d2(150)= -3.259152976833886D-21 |
| 160 | d1(160)=2.145396409186429D-23 | d2(160)= -1.192341479630606D-22 |
| 170 | d1(170)= -1.26116642452678D-23 | d2(170)=3.789303554814614D-24 |
| 180 | d1(180)= -1.320238175412822D-24 | d2(180)=9.3004486634728D-25 |
| 190 | d1(190)= -6.76055431338822D-26 | d2(190)=7.206165815996764D-26 |
| 200 | d1(200)= -1.785001914295692D-28 | d2(200)=2.516077672237467D-27 |
| 210 | d1(210)=3.149972383704618D-28 | d2(210)= -1.068208092766636D-28 |
| 220 | d1(220)=3.195270379806823D-29 | d2(220)= -2.29860126282126D-29 |
| 230 | d1(230)=1.586933023854607D-30 | d2(230)= -1.74002795354211D-30 |
| 240 | d1(240)= -3.500797204076366D-33 | d2(240)= -5.701188091598045D-32 |
| 250 | d1(250)= -8.413713255233169D-33 | d2(250)=3.146441836637714D-33 |
| 260 | d1(260)= -8.23838267719039D-34 | d2(260)=6.056853817387386D-34 |
| 270 | d1(270)= -3.936123812961959D-35 | d2(270)=4.455695156947882D-35 |
| 280 | d1(280)=3.034927668871905D-37 | d2(280)=1.349330005108101D-36 |
| 290 | d1(290)=2.353728729302451D-37 | d2(290)= -9.549315144475957D-38 |
| 300 | d1(300)=2.220858517457501D-38 | d2(300)= -1.669304374746061D-38 |

| $t_S\left({}^oC\right)$ | $\widetilde{G}_1$ | $\widetilde{G}_1^I$ | $\widetilde{G}_1^{II}$ | $\widetilde{G}_1^{III}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.000000 | -3.000000 | 12.000000 | -60.000 |
| 10 | 1.076306 | -3.307234 | 13.545883 | -69.332 |
| 20 | 1.156270 | -3.631617 | 15.187438 | -79.280 |
| 30 | 1.238649 | -3.965269 | 16.866869 | -89.364 |
| 40 | 1.321972 | -4.299051 | 18.519489 | -99.074 |
| 50 | 1.404733 | -4.624279 | 20.089775 | -108.028 |
| 60 | 1.485619 | -4.934437 | 21.545129 | -116.090 |
| 70 | 1.563684 | -5.226199 | 22.880850 | -123.369 |
| 80 | 1.638427 | -5.499488 | 24.115692 | -130.136 |
| 90 | 1.709776 | -5.756815 | 25.299281 | -151.826 |

| $t_S\left({}^oC\right)$ | $\widetilde{G}_2$ | $\widetilde{G}_2^I$ | $\widetilde{G}_2^{II}$ | $\widetilde{G}_2^{III}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000 | -4.000000 | 14.000000 | -66.000 |
| 10 | 2.298421 | -4.745051 | 16.832848 | -80.349 |
| 20 | 2.598535 | -5.486241 | 19.625077 | -94.394 |
| 30 | 2.897303 | -6.206364 | 22.264780 | -107.302 |
| 40 | 3.191918 | -6.889841 | 24.654329 | -118.382 |
| 50 | 3.480281 | -7.526013 | 26.736197 | -127.315 |
| 60 | 3.761376 | -8.111381 | 28.506477 | -134.221 |
| 70 | 4.035448 | -8.649929 | 30.010096 | -139.558 |
| 80 | 4.303932 | -9.151680 | 31.323064 | -143.924 |
| 90 | 4.569214 | -9.630390 | 32.521590 | -138.048 |

**Примечание**. В приведенных выше приложениях $C1(n) = C_1(n)$, $C2(n) = C_2(n)$, $d1(n) = \Delta_1(n)$, $d2(n) = \Delta_2(n)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Хаппель, Дж.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
2. *Щукин, Е.Р.* Движение нагреваемых внутренними источниками тепла твердых частиц в бинарных газовых смесях с заданными внешними градиентами температуры и концентрации / Е.Р. Щукин, З.Л. Шулиманова; МОПИ им. Н.К.Крупской. – М., 1984. – 25 с. – Библиогр.: 7 назв. – Деп. в ВИНИТИ, №7400-84.
3. *Щукин, Е.Р.* Влияние нагрева поверхности на термофоретическое движение частицы в поле излучения. // Тезисы докладов «III Всесоюзного совещания по распространению лазерного излучения в дисперсной среде» Обнинск: Инст. экспер. метеор. – 1985. – Ч. 4. – С. 183–185.
4. *Щукин, Е.Р.* Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц / Е.Р. Щукин, Н.В. Малай // ИФЖ. – 1988. –Т. 54. – № 4. – С. 630–635.
5. *Малай, Н.В.* Влияние нагрева поверхности частиц на ускорение процесса седиментации / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов // ЖПХ. – 2002. – Т. 75. – Вып. 3. – С. 433–437.

6. *Малай, Н.В.* Особенности осаждения твердых равномерно нагретых сферических частиц в вязкой жидкости / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов // ЖХФ. – 2002. – Т. 21. – № 6. – С. 87–91.
7. *Малай, Н.В.* Влияние движения среды на термокапиллярную силу нагретой капли в вязкой жидкости в поле внешнего градиента температуры / Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов // ТВТ. – 2002. – Т. 40. – № 1. – С. 114–120.
8. *Малай, Н.В.* К вопросу о гравитационном движении равномерно нагретой капли в вязкой жидкости // ЖТФ. – 2002. – Т. 72. – Вып. 3. – С. 7–10.
9. *Малай, Н.В.* К вопросу о термофоретическом движении нагретой сферической капли в вязкой жидкости // ЖТФ. – 2002. – Т. 72. – Вып. 11. – С. 35–43.
10. *Борн, К.Ф.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К.Ф. Борн, Д.Р. Хафмен. – М.: Мир, 1986.
11. *Бретшайдер, Ст.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. – М.: Химия, 1966.
12. *Ландау, Л.Д.* Теоретическая физика. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986.– Т. 6.
13. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974.
14. *Коддингтон, Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: ин. лит., 1958.
15. *Привалов, И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1967.

*Белгородский государственный университет*

**УДК 517.925**

**С.С. Мамонов**

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ВТОРОГО РОДА МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ*

В работе методом сведения для многомерной системы фазовой синхронизации получены условия существования предельного цикла второго рода.

Системы фазовой синхронизации (СФС) получили широкое распространение в радиоэлектронике, технике, связи, радионавигации, механике [1, 2, 3, 4]. К системам фазовой синхронизации относятся системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Дифференциальное уравнение системы ФАПЧ имеет следующее выражение [1, 3, 4]:

$$p\sigma + \Omega_y F(\sigma)K(p) = \Omega_н, \tag{1}$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ – разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, $\Omega_y$ – полоса удержания, $\Omega_н$ – начальная расстройка, $K(p)$ – операторный коэффициент передачи фильтра нижних частот, $F(\sigma)$ – характеристика фазового детектора. В случае дробно-рационального фильтра $K(p)=\dfrac{R(p)}{Q(p)}=\dfrac{A_0p^{n-1}+A_1p^{n-2}+\ldots+A_{n-2}p+A_{n-1}}{B_0p^n+B_1p^{n-1}+\ldots+B_{n-2}p^2+B_{n-1}p+B_n}$ уравнение (1) примет вид:

$$\sigma^{(n+1)}+B_0^{-1}\left(B_1\sigma^{(n)}+B_2\sigma^{(n-1)}+\ldots+B_n\dot{\sigma}\right)+$$
$$+B_0^{-1}\left(A_0\varphi^{(n-1)}(\sigma)+A_1\varphi^{(n-2)}(\sigma)+\ldots+A_{n-2}\dot{\varphi}(\sigma)+A_{n-1}\varphi(\sigma)\right)=0, \tag{2}$$

где $\varphi(\sigma)=\Omega_у F(\sigma)-\Omega_н B_0A_{n-1}^{-1}$. Заменой переменных $x_n=\dot{\sigma}$, $\dot{x}_i=x_{i-1}-b_i\varphi(\sigma)$, $i=\overline{2,n}$, $b_n=B_0^{-1}A_0$, $b_{n-k}=B_0^{-1}\left(A_k-\sum\limits_{j=0}^{k-1}b_{n-j}B_{k-j}\right)$, $k=\overline{1,n-1}$ уравнение (2) приводится к системе

$$\dot{x}=Ax+b\varphi(\sigma),$$
$$\dot{\sigma}=c^Tx, \tag{3}$$

---

* Материалы Всероссийской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения И.П. Макарова (1906–1984) и 55-летию создания кафедры математического анализа Рязанского государственного университета. — Рязань, 2006.

где $x\in R^n$, $c=colon(0,0,\ldots,0,1)$, $b=colon(-b_1,-b_2,\ldots,-b_n)$, $b_n=B_0^{-1}A_0$,

$$A=\begin{pmatrix}-B_0^{-1}B_1 & -B_0^{-1}B_2 & \ldots & -B_0^{-1}B_{n-1} & -B_0^{-1}B_n\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\end{pmatrix},$$ $\varphi(\sigma)$ – $\Delta$-периодическая функция.

**Определение**. Решение $z(t,x_0)=\begin{pmatrix}x(t,x_0)\\ \sigma(t,\sigma_0)\end{pmatrix}$ системы (3) называется предельным циклом второго рода, если существует $\tau>0$, целое число $j\neq 0$, такие что $x(t+\tau,x_0)=x(t,x_0)$, $\sigma(t+\tau,\sigma_0)=\sigma(t,\sigma_0)+\Delta j$.

Система (3) изучалась в работах [2, 3, 4], где получены условия устойчивости, соответствующие режиму синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и оценки числа предельных циклов второго рода. Предельный цикл второго рода соответствует асинхронному режиму СФС, особенностью которого является нарастание разности фаз $\sigma(t)$. Результаты, полученные для системы второго порядка, применяются для исследования многомерных систем фазовой синхронизации.

**Теорема.** Пусть для системы (3) существуют $\lambda_{k,m},\ k = \overline{2,n},\ m = \overline{1,k-1}$, такие, что выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0,\ \ c^T A = l_2^T,\ l_k^T A = l_{k+1}^T,\ \ k = \overline{2,n-1},\ \ l_n^T A = -a_n l_n^T - a_{n-1} \times$ $\times\, l_{n-1}^T - \ldots - a_2 l_2^T - a_1 c^T,\ l_k^T b = b_k, k = \overline{2,n}$;

2) $b_2 - \Gamma\lambda_{2,1} = 0,\ \lambda_{2,1} > 0,\ b_k + \lambda_{k,k-1} b_{k-1} + \ldots + \lambda_{k,2} b_2 - \lambda_{k,1}\Gamma = 0,\ \lambda_{k,1} \ge 0,$ $k = \overline{3,n}$;

3) уравнение

$$\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\varphi(\sigma)}{F(\sigma)} = -\alpha^* \tag{4}$$

при $\alpha^* = \dfrac{\lambda_{2,1}}{\sqrt{\Gamma}}$ имеет $\Delta$ -периодическое решение $F(\sigma) > 0,\ \sigma \in (-\infty; +\infty)$;

4) $\varepsilon_{k,1} = -\lambda_{k+1,1} - \lambda_{k,1}(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}), \varepsilon_{k,j} = (\lambda_{k,j-1} - \lambda_{k+1,j}) - \lambda_{k,j}(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}),$ $k = \overline{2,n-1},\ \ j = \overline{2,k-1},\ \tau_{k,k-1} = \varepsilon_{k,k-1} \ge 0,\ \tau_{k,j} = \varepsilon_{k,j} - \lambda_{k-1,j}\tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,j}\tau_{k,k-2} -$ $- \ldots - \lambda_{j+1,j}\tau_{k,j+1} \ge 0,\ \ k = \overline{2,n-1}, j = \overline{1,k-2}$;

5) $\mu_1 = -a_1 - \lambda_{n,1}(\lambda_{n,n-1} - a_n),\ \mu_k = (\lambda_{n,k-1} - a_k) - \lambda_{n,k}(\lambda_{n,n-1} - a_n),\ k = \overline{2,n-1},$ $\gamma_{n-1} = \mu_{n-1} \ge 0,\ \gamma_j = \mu_j - \lambda_{n-1,j}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,j}\gamma_{n-2} - \ldots - \lambda_{j+1,j}\gamma_{j+1} \ge 0,\ j = \overline{1,n-2}$;

6) матрица $A$ – гурвицева.

Тогда система (3) имеет предельный цикл второго рода.

**Доказательство.** Рассмотрим функции $V_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}F(\sigma),\ \ F(\sigma)$ – $\Delta$ -периодическое решение уравнения (4), $F(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$; $V_2(z) = l_2^T x + \lambda_{2,1} c^T x, b_2 - \Gamma\lambda_{2,1} = 0;\ V_3(z) = l_3^T x + \lambda_{3,2} l_2^T x + \lambda_{3,1} c^T x, b_3 + \lambda_{3,2} b_2 -$ $- \lambda_{3,1}\Gamma = 0;\ V_k(z) = l_k^T x + \lambda_{k,k-1} l_{k-1}^T x + \ldots + \lambda_{k,2} l_2^T x + \lambda_{k,1} c^T x,\ b_k + \lambda_{k,k-1} b_{k-1} +$ $+ \ldots + \lambda_{k,2} b_2 - \lambda_{k,1}\Gamma = 0,\ k = \overline{3,n}$.

Пусть $\Omega_k = \{ z : V_k(z) \ge 0, k = \overline{1,n} \},\ \Omega = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \Omega_k,$ тогда граница множества $\Omega$ имеет вид $\partial\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \partial\Omega_k,\ \partial\Omega_k = \{ z : V_k(z) = 0, V_m(z) \ge 0, m \ne k, m = \overline{1,n} \}$.

Рассмотрим границу $\partial\Omega_1$. Если $z \in \partial\Omega_1$, то выполняются соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} F(\sigma), \tag{5}$$

$$l_2^T x \geq -\lambda_{2,1} c^T x. \tag{6}$$

Используя условия теоремы 1), 2), 3), соотношения (5), (6), найдем производную функции $V_1(z)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega_1$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z) &= l_2^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \sqrt{\Gamma}\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} c^T x \geq \\ &\geq -\lambda_{2,1} c^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \sqrt{\Gamma}\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\sqrt{\Gamma}F(\sigma) = \\ &= -\lambda_{2,1}\sqrt{\Gamma}F(\sigma) - \Gamma F(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F(\sigma)} + \frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\right) = \\ &\geq \Gamma F(\sigma)\left(-\frac{\lambda_{2,1}}{\sqrt{\Gamma}} - \frac{\varphi(\sigma)}{F(\sigma)} - \frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, если выполнено условие 3) теоремы, то производная функции $V_1(z)$ на множестве $\partial\Omega_1$ удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_1(z) \geq 0$.

Рассмотрим границу $\partial\Omega_2$. Если $z \in \partial\Omega_2$, то выполняются соотношения

$$c^T x \geq \sqrt{\Gamma} F(\sigma), \tag{8}$$

$$l_2^T x = -\lambda_{2,1} c^T x, \tag{9}$$

$$l_3^T x \geq -\lambda_{3,2} l_2^T x - \lambda_{3,1} c^T x. \tag{10}$$

Используя условия теоремы 1), 2), 4), соотношения (8), (9), (10), найдем производную функции $V_2(z)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega_2$

$$\dot{V}_2(z) = l_3^T x + \lambda_{2,1} l_2^T x \geq -\lambda_{3,2} l_2^T x - \lambda_{3,1} c^T x + \lambda_{2,1} l_2^T x = l_2^T x(\lambda_{2,1} - \lambda_{3,2}) - \lambda_{3,1} c^T x =$$
$$= \lambda_{2,1}(\lambda_{3,2} - \lambda_{2,1}) c^T x - \lambda_{3,1} c^T x = (\lambda_{2,1}(\lambda_{3,2} - \lambda_{2,1}) - \lambda_{3,1}) c^T x = \varepsilon_{2,1} c^T x \geq \varepsilon_{2,1}\sqrt{\Gamma}F(\sigma) \geq 0.$$

Рассмотрим границу $\partial\Omega_k$. Если $z \in \partial\Omega_k$, то выполняются соотношения

$$c^T x \geq \sqrt{\Gamma} F(\sigma),$$

$$l_k^T x = -\lambda_{k,k-1} l_{k-1}^T x - \ldots - \lambda_{k,2} l_2^T x - \lambda_{k,1} c^T x, \tag{11}$$

$$l_m^T x \geq -\lambda_{m,m-1} l_{m-1}^T x - \ldots - \lambda_{m,2} l_2^T x - \lambda_{m,1} c^T x, \; m = \overline{2,n}, \; m \neq k. \tag{12}$$

Используя условия теоремы 1), 2), 4) соотношения (8), (11), (12), найдем производную функции $V_k(z)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega_k$

$$
\begin{gathered}
\dot{V}_k(z) = l_{k+1}^T x + \lambda_{k,k-1} l_k^T x + \lambda_{k,k-2} l_{k-1}^T x + \ldots + \lambda_{k,2} l_3^T x + \lambda_{k,1} l_2^T x \geq \\
\geq -\lambda_{k+1,k} l_k^T x - \lambda_{k+1,k-1} l_{k-1}^T x - \ldots - \lambda_{k+1,2} l_2^T x - \lambda_{k+1,1} c^T x + \lambda_{k,k-1} l_k^T x + \\
+ \lambda_{k,k-2} l_{k-1}^T x + \ldots + \lambda_{k,2} l_3^T x + \lambda_{k,1} l_2^T x = \left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right) l_k^T x + \\
+ \left(\lambda_{k,k-2} - \lambda_{k+1,k-1}\right) l_{k-1}^T x + \ldots + \left(\lambda_{k,1} - \lambda_{k+1,2}\right) l_2^T x - \lambda_{k+1,1} c^T x = \\
= \left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right)\left(-\lambda_{k,k-1} l_{k-1}^T x - \ldots - \lambda_{k,2} l_2^T x - \lambda_{k,1} c^T x\right) + \\
+ \left(\lambda_{k,k-2} - \lambda_{k+1,k-1}\right) l_{k-1}^T x + \ldots + \left(\lambda_{k,1} - \lambda_{k+1,2}\right) l_2^T x - \lambda_{k+1,1} c^T x = \\
= \left(\left(\lambda_{k,k-2} - \lambda_{k+1,k-1}\right) - \lambda_{k,k-1}\left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right)\right) l_{k-1}^T x + \left(\left(\lambda_{k,k-3} - \lambda_{k+1,k-2}\right) - \right. \\
\left. - \lambda_{k,k-2}\left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right)\right) l_{k-2}^T x + \ldots + \left(\left(\lambda_{k,1} - \lambda_{k+1,2}\right) - \lambda_{k,2}\left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right)\right) l_2^T x + \\
+ \left(-\lambda_{k+1,1} - \lambda_{k,1}\left(\lambda_{k,k-1} - \lambda_{k+1,k}\right)\right) c^T x = \varepsilon_{k,k-1} l_{k-1}^T x + \varepsilon_{k,k-2} l_{k-2}^T x + \ldots + \\
+ \varepsilon_{k,2} l_2^T x + \varepsilon_{k,1} c^T x \geq \tau_{k,k-1}\left(-\lambda_{k-1,k-2} l_{k-2}^T x - \lambda_{k-1,k-3} l_{k-3}^T x - \ldots - \right. \\
\left. - \lambda_{k-1,2} l_2^T x - \lambda_{k-1,1} c^T x\right) + \varepsilon_{k,k-2} l_{k-2}^T x + \varepsilon_{k,k-3} l_{k-3}^T x + \ldots + \varepsilon_{k,2} l_2^T x + \varepsilon_{k,1} c^T x = \\
= \left(\varepsilon_{k,k-2} - \lambda_{k-1,k-2} \tau_{k,k-1}\right) l_{k-2}^T x + l_{k-3}^T x\left(\varepsilon_{k,k-3} - \lambda_{k-1,k-3} \tau_{k,k-1}\right) + \ldots + \\
+ \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1}\right) l_2^T x + \left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1}\right) c^T x = \\
= \tau_{k,k-2} l_{k-2}^T x + \left(\varepsilon_{k,k-3} - \lambda_{k-1,k-3} \tau_{k,k-1}\right) l_{k-3}^T x + \ldots + \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1}\right) l_2^T x + \\
+ \left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1}\right) c^T x \geq \tau_{k,k-2}\left(-\lambda_{k-2,k-3} l_{k-3}^T x - \lambda_{k-2,k-4} l_{k-4}^T x - \ldots - \right. \\
\left. - \lambda_{k-2,2} l_2^T x - \lambda_{k-2,1} c^T x\right) + \left(\varepsilon_{k,k-3} - \lambda_{k-1,k-3} \tau_{k,k-1}\right) l_{k-3}^T x + \\
+ \left(\varepsilon_{k,k-4} - \lambda_{k-1,k-4} \tau_{k,k-1}\right) l_{k-4}^T x + \ldots + \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1}\right) l_2^T x - \\
+ c^T x\left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1}\right) = \left(\left(\varepsilon_{k,k-3} - \lambda_{k-1,k-3} \tau_{k,k-1}\right) - \lambda_{k-2,k-3} \tau_{k,k-2}\right) l_{k-3}^T x \\
+ \left(\varepsilon_{k,k-4} - \lambda_{k-1,k-4} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,k-4} \tau_{k,k-2}\right) l_{k-4}^T x + \ldots + \\
+ \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,2} \tau_{k,k-2}\right) l_2^T x + \left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,1} \tau_{k,k-2}\right) c^T x \geq \\
\geq \tau_{k,k-3}\left(-\lambda_{k-3,k-4} l_{k-4}^T x - \ldots - \lambda_{k-3,2} l_2^T x - \lambda_{k-3,1} c^T x\right) + \left(\varepsilon_{k,k-4} - \lambda_{k-1,k-4} \tau_{k,k-1} - \right. \\
\left. - \lambda_{k-2,k-4} \tau_{k,k-2}\right) l_{k-4}^T x + \ldots + \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,2} \tau_{k,k-2}\right) l_2^T x + \\
+ c^T x\left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,1} \tau_{k,k-2}\right) c^T x = \left(\varepsilon_{k,k-4} - \lambda_{k-1,k-4} \tau_{k,k-1} - \right. \\
\left. - \lambda_{k-2,k-4} \tau_{k,k-2} - \tau_{k,k-3} \lambda_{k-3,k-4}\right) l_{k-4}^T x + \ldots + \left(\varepsilon_{k,2} - \lambda_{k-1,2} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,2} \tau_{k,k-2} - \right. \\
\left. - \lambda_{k-3,2} \tau_{k,k-3}\right) l_2^T x + \left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,1} \tau_{k,k-2} - \lambda_{k-3,1} \tau_{k,k-3}\right) c^T x \geq \\
\geq \tau_{k,2} l_2^T x + c^T x\left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1} \tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,1} \tau_{k,k-2} - \lambda_{k-3,1} \tau_{k,k-3} - \ldots - \lambda_{3,1} \tau_{k,3}\right) \geq
\end{gathered}
$$

$$\geq \left(\varepsilon_{k,1} - \lambda_{k-1,1}\tau_{k,k-1} - \lambda_{k-2,1}\tau_{k,k-2} - \lambda_{k-3,1}\tau_{k,k-3} - \ldots - \lambda_{3,1}\tau_{k,3} - \lambda_{2,1}\tau_{k,2}\right)c^T x = \tau_{k,1}c^T x.$$

$$\dot{V}_k(z) \geq \tau_{k,1}\sqrt{\Gamma}F(\sigma) \geq 0 \quad (13)$$

Таким образом, если выполнены условия 1), 2), 4) 3) теоремы, то производная функции $V_k(z)$ на множестве $\partial\Omega_k$ удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_k(z) \geq 0$.

Рассмотрим границу $\partial\Omega_n$. Если $z \in \partial\Omega_n$, то выполняются соотношения

$$c^T x \geq \sqrt{\Gamma}F(\sigma),$$

$$l_n^T x = -\lambda_{n,n-1}l_{n-1}^T x - \ldots - \lambda_{n,2}l_2^T x - \lambda_{n,1}c^T x, \quad (14)$$

$$l_m^T x \geq -\lambda_{m,m-1}l_{m-1}^T x - \ldots - \lambda_{m,2}l_2^T x - \lambda_{m,1}c^T x, \; m = \overline{2, n-1}. \quad (15)$$

Используя условия теоремы 1), 2), 5), соотношения (8), (14), (15), найдем производную функции $V_n(z)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega_n$

$$\dot{V}_n(z) = -a_n l_n^T x - a_{n-1}l_{n-1}^T x - \ldots - a_2 l_2^T x - a_1 c^T x + \lambda_{n,n-1}l_n^T x + \lambda_{n,n-2}l_{n-1}^T x + \ldots +$$
$$+ \lambda_{n,2}l_3^T x + \lambda_{n,1}l_2^T x = \left(\lambda_{n,n-1} - a_n\right)l_n^T x + \left(\lambda_{n,n-2} - a_{n-1}\right)l_{n-1}^T x + \ldots + \left(\lambda_{n,2} - a_3\right)l_3^T x +$$
$$+ \left(\lambda_{n,1} - a_2\right)l_2^T x - a_1 c^T x = \left(\lambda_{n,n-1} - a_n\right)\left(-\lambda_{n,n-1}l_{n-1}^T x - \ldots - \lambda_{n,2}l_2^T x - \lambda_{n,1}c^T x\right) +$$
$$+ \left(\lambda_{n,n-2} - a_{n-1}\right)l_{n-1}^T x + \ldots + l_3^T x\left(\lambda_{n,2} - a_3\right) + \left(\lambda_{n,1} - a_2\right)l_2^T x - a_1 c^T x =$$
$$= \left(\left(\lambda_{n,n-2} - a_{n-1}\right) - \lambda_{n,n-1}\left(\lambda_{n,n-1} - a_n\right)\right)l_{n-1}^T x + l_{n-2}^T x\left(\left(\lambda_{n,n-3} - a_{n-2}\right) - \lambda_{n,n-2} \times\right.$$
$$\left.\times\left(\lambda_{n,n-1} - a_n\right)\right) + \ldots + \left(\left(\lambda_{n,1} - a_2\right) - \lambda_{n,2}\left(\lambda_{n,n-1} - a_n\right)\right)l_2^T x + c^T x\left(-a_1 + \lambda_{n,1}\left(a_n - \lambda_{n,n-1}\right)\right) =$$
$$= \mu_{n-1}l_{n-1}^T x + \mu_{n-2}l_{n-2}^T x + \ldots + \mu_2 l_2^T x + \mu_1 c^T x \geq \mu_{n-1}\left(-\lambda_{n-1,n-2}l_{n-2}^T x -\right.$$
$$\left.- \lambda_{n-1,n-3}l_{n-3}^T x - \ldots - \lambda_{n-1,2}l_2^T x - \lambda_{n-1,1}c^T x\right) + \mu_{n-2}l_{n-2}^T x + \mu_{n-3}l_{n-3}^T x + \ldots + \mu_2 l_2^T x +$$
$$+ \mu_1 c^T x \geq \gamma_{n-2}\left(-\lambda_{n-2,n-3}l_{n-3}^T x - \ldots - \lambda_{n-2,2}l_2^T x - \lambda_{n-2,1}c^T x\right) + \left(\mu_{n-3} - \lambda_{n-1,n-3}\gamma_{n-1}\right)\times$$
$$\times l_{n-3}^T x + \ldots + \left(\mu_2 - \lambda_{n-1,2}\gamma_{n-1}\right)l_2^T x + \left(\mu_1 - \lambda_{n-1,1}\gamma_{n-1}\right)c^T x = \gamma_{n-3}l_{n-3}^T x + \ldots +$$
$$+ l_2^T x\left(\mu_2 - \lambda_{n-1,2}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,2}\gamma_{n-2}\right) + \left(\mu_1 - \lambda_{n-1,1}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,1}\gamma_{n-2}\right)c^T x \geq$$
$$\geq l_2^T x\left(\mu_2 - \lambda_{n-1,2}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,2}\gamma_{n-2} - \ldots - \lambda_{3,2}\gamma_3\right) + \left(\mu_1 - \lambda_{n-1,1}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,1}\gamma_{n-2} -\right.$$
$$\left.- \ldots - \lambda_{3,1}\gamma_3\right)c^T x \geq \left(\mu_1 - \lambda_{n-1,1}\gamma_{n-1} - \lambda_{n-2,1}\gamma_{n-2} - \ldots - \lambda_{3,1}\gamma_3 - \lambda_{2,1}\gamma_2\right)c^T x = \gamma_1 c^T x.$$

$$\dot{V}_n(z) \geq \gamma_1\sqrt{\Gamma}F(\sigma) \geq 0 \quad (16)$$

Таким образом, производная функции $V_n(z)$ на множестве $\overline{\partial\Omega_n}$ удовлетворяет неравенству: $\dot{V}_n(z) \geq 0$. В силу неравенств $\lambda_{k,1} \geq 0, k = \overline{2,n}$, (7), (13), (16) множество $\Omega \neq$ Ø является положительно инвариантным.

В силу условия 6) теоремы матрица $A$ – гурвицева, следовательно, существует $\lambda > 0$, для которого матрица $(A + \lambda I)$ – гурвицева, где $I$ – единичная матрица. В качестве матрицы $H > 0$ возьмем решение матричного неравенства $(A+\lambda I)^T H + H(A+\lambda I) \le 0$. При достаточно большом $d$ множества $Q = \{z : x^T H x \le d^2\}$, $Q \bigcap \Omega$ положительно инвариантные. Применяя теорему Брауэра для множества $Q \bigcap \Omega \bigcap \{z : \sigma = 0\}$, получим, что во множестве $Q \bigcap \Omega$ содержится предельный цикл второго рода.

**Пример 1.** Рассмотрим систему (3), для которой

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда получим $c^T b = -\Gamma < 0, c^T A = (0,1) = l_2^T, l_2^T A = (-\alpha, -\beta) = -\alpha l_2^T - \beta c^T$, $l_2^T b = \nu = b_2$. Из условия 2) теоремы найдем $\lambda_{2,1} = \frac{b_2}{\Gamma} = \frac{\nu}{\Gamma}$. Если $\lambda_{2,1} = \frac{\nu}{\Gamma} \ge 0$, то выполнены условия 2) теоремы. Пусть $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma$, в этом случае в работе [4] показано существование $\alpha_{кр}$ такого, что при $\alpha^* < \alpha_{кр}$ уравнение (4) имеет $\Delta$ - периодическое решение $F(\sigma) > 0,\ \ \sigma \in (-\infty; +\infty)$. Таким образом, если выполнено неравенство $\frac{\lambda_{2,1}}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр}$, то выполнено условие 3) теоремы. При $n = 2$ получим $n-1 = 1 < 2$, условия 4) не проверяются. Условия 5) примут вид: $\mu_1 = -\beta - \lambda_{2,1}(\lambda_{2,1} - \alpha) = -\beta - \frac{\nu}{\Gamma}\left(\frac{\nu}{\Gamma} - \alpha\right) = -\frac{\nu^2}{\Gamma^2} + \frac{\nu}{\Gamma}\alpha - \beta, \gamma_1 = \mu_1 \ge 0$. Таким образом, если выполнены соотношения

$$\frac{\nu}{\Gamma} \ge 0,\ \frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр},\ \frac{\nu^2}{\Gamma^2} - \frac{\nu}{\Gamma}\alpha + \beta \le 0, \tag{17}$$

то выполнены условия 1), 2), 3), 4), 5) теоремы. В системе (3) существует предельный цикл второго рода.

Обозначим $W(p) = c^T(A - pI)^{-1} b$. В работе [2] показано, что если существует $\lambda > 0$ для которого выполнены условия:

a) $\operatorname{Re} W(i\omega - \lambda) < 0,\ \lim\limits_{\omega \to +\infty} \omega^2 \operatorname{Re} W(i\omega - \lambda) < 0, \omega \in [0; +\infty)$;

b) матрица $A + \lambda I$ имеет одно положительное собственное значение и $n-1$ собственное значение с отрицательными вещественными частями;

c) уравнение (4) при $\alpha^* = \frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma}}$ имеет предельный цикл второго рода;

то система (3) имеет предельный цикл второго рода.

В рассматриваемом случае

$$W(p) = \frac{\Gamma p + (\Gamma\alpha - \nu)}{p^2 + \alpha p + \beta},\ W(i\omega - \lambda) = \frac{(\Gamma\alpha - \nu - \Gamma\lambda) + i\omega\Gamma}{(\lambda^2 - \omega^2 - \alpha\lambda + \beta) + i\omega(\alpha - 2\lambda)},$$

$$\operatorname{Re} W(i\omega - \lambda) = \frac{\omega^2(\alpha\Gamma - \Gamma\lambda - (\Gamma\alpha - \nu)) + ((\Gamma\alpha - \nu) - \Gamma\lambda)(\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta)}{(\lambda^2 - \omega^2 - \alpha\lambda + \beta)^2 + \omega^2(\alpha - 2\lambda)^2}.$$

Если справедливо неравенство $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta < 0$, то матрица $A + \lambda I$ имеет одно собственное значение с положительной и одно собственное значение с отрицательной вещественной частью. Таким образом, если существует $\lambda > 0$, удовлетворяющее неравенствам:

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta < 0,\ \frac{\nu}{\Gamma} < \lambda < \alpha - \frac{\nu}{\Gamma},\ \frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр}, \tag{18}$$

то будут выполнены условия a), b), c). Условия (17), (18) дополняют друг друга. Если $\frac{\nu}{\Gamma} > \alpha - \frac{\nu}{\Gamma}$, то условия (18) не выполняются, но могут выполняться условия (17). Если $\frac{\alpha}{2} - \frac{\nu}{\Gamma} > \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$, то $\frac{\nu^2}{\Gamma^2} - \frac{\nu}{\Gamma}\alpha + \beta > 0$ и условия (17) не выполняются, но если существует $\lambda > 0$, для которого $\frac{1}{2}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) <$ $< \lambda < \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right) < \alpha - \frac{\nu}{\Gamma},\ \frac{\lambda}{\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр}$, то выполняются условия (18).

Пусть $\Gamma = 1.1, \nu = 0.3, \alpha = 0.45, \beta = 0.04, \gamma = 0.5,$ тогда $\frac{\nu}{\Gamma} > \alpha - \frac{\nu}{\Gamma}$, условия (18) не выполняются. Для соотношений (17) получим $\frac{\nu^2}{\Gamma^2} - \frac{\nu}{\Gamma}\alpha + \beta < 0$, $\frac{\nu}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} <$ $< \alpha_{кр} = 0.44$, система (3) имеет предельный цикл второго рода.

**Пример 2.** Рассмотрим систему (3), для которой

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\tau \\ \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix},$$

тогда получим $c^T b = -\Gamma < 0,\ c^T A = (0, 1, 0) = l_2^T,\ \ l_2^T A = (1, 0, 0) = l_3^T,\ \ l_3^T A =$ $= (-\mu, -\alpha, -\beta) = -\mu l_3^T - \alpha l_2^T - \beta c^T,\ l_2^T b = \nu = b_2,\ l_3^T b = -\tau = b_3$. Условия 2) теоремы примут вид $\lambda_{2,1} = \frac{\nu}{\Gamma},\ -\tau + \lambda_{3,2}\nu - \lambda_{3,1}\Gamma = 0, \lambda_{3,1} \geq 0$. Для условия 4) получим соотношения: $\varepsilon_{2,1} = -\lambda_{3,1} - \lambda_{2,1}(\lambda_{2,1} - \lambda_{3,2}) = \tau_{2,1} \geq 0.$ Найдем $\mu_1, \mu_2, \gamma_2, \gamma_1$:

$$\mu_1 = -\beta - \lambda_{3,1}(\lambda_{3,2} - \mu),\ \mu_2 = (\lambda_{3,1} - \alpha) - \lambda_{3,2}(\lambda_{3,2} - \mu),$$

$$\gamma_2 = \mu_2 \geq 0, \quad \gamma_1 = \mu_1 - \lambda_{2,1}\gamma_2 \geq 0.$$

Таким образом, если выполнены соотношения $\lambda_{2,1} = \frac{\nu}{\Gamma}, -\tau + \lambda_{3,2}\nu - \lambda_{3,1}\Gamma = 0,$

$\lambda_{3,1} \geq 0$, $-\lambda_{3,1} - \lambda_{2,1}(\lambda_{2,1} - \lambda_{3,2}) \geq 0$, $(\lambda_{3,1} - \alpha) - \lambda_{3,2}(\lambda_{3,2} - \mu) \geq 0$, $-\beta - \lambda_{3,1}(\lambda_{3,2} - \mu) - \lambda_{2,1}(\lambda_{3,1} - \alpha) + \lambda_{2,1}\lambda_{3,2}(\lambda_{3,2} - \mu) \geq 0$, то выполняются условия 1), 2), 4), 5), 6) теоремы.

Пусть $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma$. Следовательно, если существует $\lambda_{3,2}$, для которого выполняются соотношения:

$$\frac{\lambda}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр},\ \tau - \frac{\nu^2}{\Gamma} \geq 0,\ \lambda_{3,2}\nu - \tau \geq 0,$$

$$\lambda_{3,2}\frac{1}{\Gamma}\left(\tau - \frac{\nu^2}{\Gamma}\right) - \left(\beta + \frac{\tau\mu}{\Gamma} - \frac{\nu\tau}{\Gamma^2} - \frac{\alpha\nu}{\Gamma}\right) \geq 0,$$

$$\lambda_{3,2}^2 - \lambda_{3,2}\left(\mu + \frac{\nu}{\Gamma}\right) + \left(\alpha + \frac{\tau}{\Gamma}\right) \leq 0, \tag{19}$$

то в системе (3) существует предельный цикл второго рода.

Пусть $\Gamma = 1.5,\ \nu = 1, \tau = 2,\ \beta = 0.1, \alpha = 10, \mu = 6, \gamma = 0.65,$ тогда $\alpha_{кр} = 0.6$, $\frac{\lambda}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} < \alpha_{кр}$, выполнены соотношения (19), система (3) имеет предельный цикл второго рода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Жилин, Н.С.* Принципы фазовой синхронизации в измерительной технике. – Томск: Радио и связь, 1989.
2. *Леонов, Г.А.* Частотные методы в теории колебаний / Г.А. Леонов, И.М. Буркин, А.И. Шепелявый. – СПб.: СПб. университет, 1992.
3. *Леонов, Г.А.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации / Г.А. Леонов, В.Б. Смирнова. – СПб.: Наука, 2000.
4. Системы фазовой синхронизации / В.Н. Акимов, Л.Н. Белюстина, В.Н. Белых [и др.] - М.: Радио и связь, 1982.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517.925**



**С.А. Нелюхин**


# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА В ОСОБЕННОМ СЛУЧАЕ


Для неавтономной периодической по времени системы дифференциальных уравнений Дюффинга, у которого интеграл по периоду от матрицы системы линейного приближения есть особенная матрица, предложен приближенный метод

(итерационный алгоритм) построения ненулевого периодического решения специального вида.

Вопросам построения ненулевого периодического решения неавтономных периодических систем дифференциальных уравнений посвящены работы [1, 2, 3]. В данной работе на основе работы [3] дается итерационная система построения ненулевого периодического решения нелинейного уравнения Дюфинга [1] в случае, когда частота колебаний $\omega$ не постоянна, а $2\pi$ -периодична и непрерывна во времени $(\omega = \omega(t))$.

Рассмотрим уравнение Дюфинга [1] вида

$$\ddot{z} + \omega(t) z = \mu z^3 + \sin t, \tag{1}$$

которое после замены $z = \dot{x}_1, \ \dot{z} = \ddot{x}_1$ преобразуется к виду

$$\dot{x} = A(t)x + f(x, t, \mu), \tag{2}$$

где $x = colon(x_1, x_2) \in E^2$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(t) & 0 \end{pmatrix}$, $f(x, t, \mu) = colon(0, \mu x^3 + \sin t)$, $\mu$ - некоторый параметр.

В данной статье рассмотрим для системы дифференциальных уравнений (1) особенный случай, заключающийся в том, что интеграл по периоду $2\pi$ от матрицы $A(t)$ системы линейного приближения есть особенная матрица. Это будет в том случае, если для матрицы $B = \int\limits_0^{\omega} A(t)dt$ выполняется условие $\int\limits_0^{2\pi} \omega(t)dt = 0$. Следуя [3], можно показать, что для системы (1) выполняются условия Ф1, Ф2, Ф3 на множестве $[0, 2\pi] \times W$, $U(\mu_0, \delta_0) = \{\mu \in E^1 : |\mu - \mu_0| \leq \delta_0\}$, $V_n(r^*) = \{x \in E^2 : \|x\| \leq r\}$, $W =$ $= U(\mu_0, \delta_0) \times V_n(r^*)$ ($\delta_0 > 0$, $r^* > 0$ - некоторые числа, $\mu_0 \in E^1$).

Следуя [3], для системы (1) введем обозначения:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P_0^{(*)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{P}_1^{(*)} : E^2 \to \ker B_1^*, \ H(t) = \begin{pmatrix} 0 & t - \pi \\ h(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = P_0^{(*)} \int\limits_0^{2\pi} A(t)H(t)dtP_0, \ h(t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \tau\omega(\tau)d\tau + \left(-\frac{1}{2\pi}\right)\int\limits_t^{2\pi}(2\pi - \tau)\omega(\tau)d\tau,$$

$$M_1(t,\tau) = \left(\left((2\pi)^{-1}\tau - 1\right)E_{2,2} - H(t)B^+\right)A(t) \quad (\tau \in [t, \omega]),$$

$$M_2(t,\tau) = (2\pi)^{-1}\tau E_{2,2} - H(t)B^+ \quad (\tau \in [t, \omega]),$$

$$M_2(t,\tau) = \left((2\pi)^{-1}\tau - 1\right)E_{2,2} - H(t)B^+ \quad (\tau \in [t, \omega]),$$

$$g(y,c^{(0)},c^{(1)},t,\mu)=A(t)\int_0^{2\pi}M_2(t,\tau)f(y+c^{(0)}+c^{(1)},t,\mu)d\tau+f(y+c^{(0)}+c^{(1)},t,\mu).$$

Можно показать, что находить $2\pi$ -периодическое решение $x(t,\mu)$ уравнения Дюффинга (1) или соответствующей системы (2) следует в виде

$$x=y+c^{(0)}+c^{(1)}, \tag{3}$$

где векторы $c^{(1)}=c^{(1)}(\mu)\in\ker B,\ \ c^{(0)}=c^{(0)}(\mu)\in E^2\Theta\ \ker B$, а вектор-функция $y(t,\mu)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi}y(t,\mu)dt=0.$$

Векторы $c^{(1)}=c^{(1)}(\mu)\in\ker B,\ c^{(0)}=c^{(0)}(\mu)\in E^2\Theta\ \ker B$ и функция $y(t,\mu)$ определяются методом последовательных периодических приближений

$$c^{(0)}(\varepsilon)=\lim_k c_k^{(0)}(\mu),\ \ c^{(1)}(\varepsilon)=\lim_k c_k^{(1)}(\mu),\ \ y(t,\mu)=\lim_k y_k(t,\mu) \tag{4}$$

по соответствующему итерационному алгоритму [3]:

$$c_1^{(0)}(\mu)=c_1^{(1)}(\mu)=y_1(t,\mu)\equiv 0,\quad c_2^{(0)}(\mu)=y_2(t,\mu)\equiv 0, y_3(t,\mu)\equiv 0,$$

$$\begin{aligned}c_{k-2}^{(1)}=-B_1^{+}P_0^{(*)}\int_0^{\omega}\Bigg[A(t)\Bigg(\int_0^{\omega}M_1 y_{k-2}(\tau,\mu)d\tau+\\ +\int_0^{\omega}M_2 f\Big(y_{k-3}(\tau,\mu)+c_{k-3}^{(0)}(\mu)+c_{k-3}^{(1)}(\mu),\tau,\mu\Big)d\tau\Bigg)+\\ +f\Big(y_{k-2}(t,\mu)+c_{k-2}^{(0)}(\mu)+c_{k-2}^{(1)}(\mu),t,\mu\Big)dt\Bigg],\end{aligned} \tag{5}$$

$$c_{k-1}^{(0)}(\mu)=-B_1^{+}\int_0^{\omega}A(t)y_{k-1}(t,\mu)+f\Big(y_{k-2}(t,\mu)+c_{k-2}^{(0)}(\mu)+c_{k-2}^{(1)}(\mu),t,\mu\Big)dt\ , \tag{6}$$

$$\begin{aligned}y_k(t,\mu)=\int_0^{\omega}M_1(t,\tau)y_k(\tau,\mu)d\tau+H(t)P_0c_{k-1}^{(1)}(\mu)+\\ +\int_0^{\omega}M_2 f(t,\tau)f\Big(y_{k-2}(\tau,\mu)+c_{k-2}^{(0)}(\mu)+c_{k-2}^{(1)}(\mu),\tau,\mu\Big)d\tau,\quad k=4,5,...,\end{aligned} \tag{7}$$

причем (5) есть уравнение для нахождения вектора $c_{k-2}^{(1)}\in\ker B$ (однозначно разрешимое относительно вектора $c_{k-2}^{(1)}\in\ker B$), (6) есть формула для непосредственного нахождения вектора $c_{k-1}^{(1)}\in E^n\Theta\ \ker B$, а формула (7) – для нахождения функции $y_k(t,\mu)$, которая будет являться $2\pi$ -периодической в силу выбора вектора $c^{(1)}_{k-2} = c^{(1)}_{k-2}(\mu)$, $c^{(0)}_{k-1} = c^{(0)}_{k-1}(\mu)$.

Значит, итерационный алгоритм (5), (6), (7) можно непосредственно применить к уравнению Дюффинга (1) в случае, когда частота колебаний $\omega$ не постоянна, а $2\pi$ -периодична, непрерывна во времени ($\omega = \omega(t)$) и $\int_0^{2\pi} \omega(t)dt = 0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гребенников, Е.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребенников, Ю.А. Рябов. – М.: Наука, 1979.
2. *Лаптинский, В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
3. *Нелюхин, С.А.* Итерационный алгоритм построения периодического решения специального вида для дифференциального уравнения в особенном случае // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2003.– № 7. – С. 62–67.



*Рязанский государственный агротехнологический университет им. проф. П.А. Костычева*



**УДК 517.925**



**Т.В. Свирилина**


## К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕНУЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ


Для операторного уравнения получены достаточные условия существования и отсутствия ненулевых решений в достаточно малой окрестности нулевого решения методом линейного преобразования.


Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t,\lambda)x(h(t)) + f(t,x(t),x(h(t)),\lambda), \qquad (1)$$

в котором $x \in D(\delta_0) = \{x : x \in E_n, |x| \le \delta_0\}$, параметр $\lambda \in \Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_m, |\lambda| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, $B(t,\lambda) = \overline{B}^{(l)}(t,\lambda) + o\left(|\lambda|^l\right)$, $f(t,x,y,\lambda) = \bar{f}^{(p)}(t,s) + o\left(|s|^p\right)$, $s = (x,y,\lambda)$, $\overline{B}^{(l)}(t,\lambda)$ – матрица, элементы которой формы порядка $l$ по $\lambda$, $\bar{f}^{(p)}(t,s)$ – вектор-форма порядка $p$ по $s$. Для системы (1) выполнены следующие условия:

1) вектор-функция $f(t, x, y, \lambda)$ удовлетворяет на множестве $W(\delta_0) = [0,\omega]\times$

$\times D(\delta_0)\times D(\delta_0)\times \Lambda(\delta_0)$ условию Липшица по переменным $x$, $y$;

2) функция $h(t)$ допускает только конечное число выходов за пределы сегмента $[0,\omega]$, то есть существуют промежутки $[t_{11},t_{12}]$, …, $[t_{p_1 1},t_{p_1 2}]$ и $[t^{11},t^{12}]$, …, $[t^{p_2 1},t^{p_2 2}]$ такие, что $h(t)\le 0$ при любом $t\in[t_{i1},t_{i2}]$, $h(t)\ge\omega$ при любом $t\in[t^{j1},t^{j2}]$, $i=\overline{1,p_1}$, $j=\overline{1,p_2}$;

3) $\|A(\cdot)\|_\omega\,\omega<1$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(t,x,y,\lambda)}{|x|}=0$ равномерно относительно $(t,y,\lambda)\in[0,\omega]\times D(\delta_0)\times\Lambda(\delta_0)$, $B(t,\lambda)\equiv 0$ на множестве $[0,\omega]\times\Lambda(\delta_0)$.

Введем обозначения: $|u|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{|u_i|\}$, $\|x(\cdot)\|_t=\sup\limits_{s\in[0,t]}|x(s)|$, $\|X(\cdot)\|_t=\sup\limits_{s\in[0,t]}\|X(s)\|$, $\|X(s)\|=\max\limits_{|u|\le 1}|X(s)u|$, где $u$ – $n$–мерный вектор, $x(s)$ – $u$–мерная вектор-функция, $X(s)$ – матрица, зависящая от $s$.

Из условия $x(\omega)=x(0)=\alpha$ получим операторное уравнение

$$\left(X(\omega)-E+\overline{B}(\lambda)\right)\alpha+\overline{F}(\alpha,\lambda)+o\left(|\lambda|^l\right)\alpha+o\left(|\gamma|^p\right)=0, \tag{2}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x}=A(t)x$, $E$ – единичная матрица соответствующего порядка, $\overline{B}(\lambda)$ – матрица, элементы которой формы порядка $l$ по $\lambda$, $\overline{F}(\alpha,\lambda)$ – вектор-форма порядка $p$ по $\gamma$, $\gamma=(\alpha,\lambda)$.

Будем предполагать, что $rang\left(X(\omega)-E\right)=d<n$, $m>d$. Пусть $\alpha^1$, $\alpha^2$, …, $\alpha^{n-d}$ – линейно независимые решения системы $\left(X(\omega)-E\right)\alpha=0$. Составим $n\times(n-d)$-матрицу $L=\left(\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-d}\right)$. С помощью замены $\alpha=L\mu$, $\mu$ – $(n-d)$-мерный вектор, операторное уравнение (2) приведем к виду

$$\overline{\overline{B}}(\lambda)\mu+\overline{\overline{F}}(\mu,\lambda)+o_1\left(|\lambda|^l\right)\mu+o\left(|\overline{\gamma}|^p\right)=0,$$

в котором $\overline{\overline{B}}(\lambda)=\overline{B}(\lambda)L$, $\overline{\overline{F}}(\mu,\lambda)=\overline{F}(L\mu,\lambda)$, $o_1\left(|\lambda|^l\right)=o\left(|\lambda|^l\right)L$, $\overline{\gamma}=(\mu,\lambda)$ – $(n+m-d)$-мерный вектор.

Форму $z(\overline{\gamma})$ порядка $\overline{l}=\min\{l+1,p\}$ по $\overline{\gamma}$ определим равенством

$$z(\overline{\gamma})=\begin{cases}\overline{\overline{B}}(\lambda)\mu+\overline{\overline{F}}(\mu,\lambda), \text{если } p=l+1,\\ \overline{\overline{B}}(\lambda)\mu, \text{ если } p>l+1.\end{cases}$$

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$z(\overline{\gamma})=o\left(|\overline{\gamma}|^{\overline{l}}\right). \tag{3}$$

Пусть $\overline{\gamma}=\rho e$, $e$ – $(n+m-d)$-мерный вектор, $\rho=|\overline{\gamma}|>0$, тогда уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$z(e) = O(\rho\,|e|). \qquad (4)$$

**Лемма 1.** Пусть для любого вектора $e$, $|e| = 1$, $z(e) \neq 0$. Тогда уравнение (3) не имеет ненулевых решений в достаточно малой окрестности нуля.

**Доказательство.** Так как $z(e) \neq 0$, следовательно, существует число $J > 0$ такое, что $|z(e)| \geq J$ для любого вектора $e$, $|e| = 1$. С другой стороны, существует число $\bar{\delta}$, $0 < \bar{\delta} \leq \delta_0$, такое, что $|O(\rho)| < J$ при $\rho < \bar{\delta}$.

Таким образом, уравнение (4) не имеет решений при $\rho < \bar{\delta}$. Следовательно, уравнение (3) не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих неравенству $|\gamma| < \bar{\delta}$. Лемма доказана.

**Теорема 1.** Если существует такой $(n + m - d)$-мерный вектор $\tilde{e}$, $|\tilde{e}| = 1$, что $z(\tilde{e}) = 0$ и $rangV(\tilde{e}) = n$, где $V(\tilde{e})$ – матрица Якоби вектор-функции $z(e)$ в точке $e = \tilde{e}$, то уравнение (3) имеет ненулевое решение в достаточно малой окрестности нуля.

**Доказательство** проводится методом неподвижной точки нелинейного оператора.

Пусть существует такой $(n + m - d)$-мерный вектор $\tilde{e}$, $|\tilde{e}| = 1$, что $z(\tilde{e}) = 0$ и $0 < rangV(\tilde{e}) = d_1 < n$, $m > d + d_1$.

Рассмотрим уравнение

$$V(\tilde{e})\Delta e = \sum_{i=2}^{\bar{l}} Z_i(\tilde{e}, \Delta e) + O(\rho\,|e|),$$

в котором $\Delta e = e - \tilde{e}$, $Z_i(\tilde{e}, \Delta e)$ – вектор-форма $i$-го порядка относительно $\Delta e$.

Введем замену $\Delta e = Y\Delta\bar{e}$, где $\Delta\bar{e}$ – $(n + m - d - d_1)$-мерный вектор, $Y$ – $(n + m - d) \times (n + m - d - d_1)$-матрица, составленная из $(n + m - d - d_1)$ линейно независимых решений системы $V(\tilde{e})\Delta e = 0$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\sum_{i=2}^{\bar{l}} Z_i(\tilde{e}, \Delta\bar{e}) = O(\rho\,|e|).$$

Пусть $\sum_{i=2}^{\bar{l}} Z_i(\tilde{e}, \Delta\bar{e}) = \chi_c(\Delta\bar{e}) + o(|\Delta\bar{e}|^c)$, $\chi_c(\Delta\bar{e})$ – вектор-форма наименьшего порядка $c$, $2 \leq c \leq \bar{l}$, положим $\Delta\bar{e} = \bar{\rho}\eta$, $\eta$ – $(n + m - d - d_1)$-мерный вектор, $\bar{\rho} = |\Delta\bar{e}| > 0$, $|\eta| = 1$. Тогда предыдущее уравнение можно привести к виду

$$\chi_c(\eta) = O(\bar{\rho}) + \frac{O(\rho\,|e|)}{\bar{\rho}^{c}}.$$

**Лемма 2.** Пусть для любого вектора $\eta$, $|\eta| = 1$, $\chi_c(\eta) \neq 0$. Тогда в любой окрестности точки $\bar{\gamma} = 0$ существует множество, в котором уравнение (3) не имеет ненулевых решений.

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 1.

**Теорема 2.** Если существует такой $(n + m - d - d_1)$-мерный вектор $\tilde{\eta}$, $|\tilde{\eta}| = 1$, что $\chi_c(\tilde{\eta}) = 0$ и $rangU(\tilde{\eta}) = n$, где $U(\tilde{\eta})$ – матрица Якоби вектор-функции $\chi_c(\eta)$ в точке $\eta = \tilde{\eta}$, то уравнение (3) имеет ненулевое решение в достаточно малой окрестности нуля.

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 1.

Если $rangU(\tilde{\eta}) < n$, то процедура получения условий существования ненулевого решения операторного уравнения может быть продолжена до тех пор, пока размерность $m \geq d + d_1 + \ldots + d_k$ ($k$ – номер процедуры). Если $m < d + d_1 + \ldots + d_{k+1}$, то далее этим методом получить условия существования ненулевого решения операторного уравнения будет невозможно, и процедура остановится.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Свирилина, Т.В.* Условия существования и отсутствия решения двухточечной краевой периодической задачи нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклонением // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 9. – С. 83–88.



*Московский государственный университет прикладной биотехнологии*



**УДК 517.925**



**Т.В. Свирилина**


# НЕНУЛЕВЫЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ


Приводятся достаточные условия существования ненулевых решений операторного уравнения с параметром в случае специального вида вектор-форм наименьших порядков.


Рассмотрим операторное уравнение

$$M(\lambda)\beta + L(\mu) + o(|\lambda|^l)\beta + o(|\mu|^p) = 0, \quad (1)$$

в котором $M(\lambda)$ – квадратная матрица порядка $r$, параметр $\lambda \in \Lambda(\delta_0) = \{\lambda : \lambda \in E_m, |\lambda| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число, $\beta$ – $r$-мерный вектор, $\lim\limits_{\lambda \to 0} M(\lambda) = 0$, $L(\mu)$ – вектор-форма порядка $p$ по $\mu = (\beta, \lambda)$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{o(|\lambda|^l)}{|\lambda|^l} = 0$, $\lim\limits_{\beta \to 0} \dfrac{o(|\mu|^p)}{|\beta|} = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Пусть в уравнении (1) $M(\lambda)\beta + L(\mu) = N(\mu) + o(|\mu|^p)$, где $p = \min\{p, \overline{p}\}$, $\overline{p}$ – порядок вектор-функции $M(\lambda)\beta$ по $\mu = (\beta, \lambda)$, $N(\mu)$ – вектор-форма порядка $p$ по $\mu$.

Операторное уравнение (1) примет вид

$$N(\mu) + o(|\mu|^p) = 0. \quad (2)$$

Ставится задача – найти условия существования ненулевых решений операторного уравнения (1) в достаточно малой окрестности нулевого решения.

Введем замену $\mu = (\beta, \lambda) = \rho e$, $e = (e_1, e_2, \ldots, e_{r+m})$. Тогда уравнение (2) можно записать так:

$$N(e) + O(\rho|e|) = 0, \quad (3)$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} O(\rho|e|) = 0$ равномерно относительно $e$ $(|e| \le \Omega, \Omega > 1)$.

**Теорема 1.** Если существует вектор $e_0$, такой, что $N(e_0) \ne 0$, то в любой окрестности точки $\mu = 0$ существует множество, в котором уравнение (1) не имеет решений.

**Доказательство.** Так как $N(e)$ – форма по $e$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $e \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)$ $N(e) \ne 0$, где $\overline{U}(e_0, \varepsilon)$ – замыкание $\varepsilon$-окрестности точки $e_0$. Поскольку $\overline{U}(e_0, \varepsilon)$ – замкнутое и ограниченное множество, то по теореме Вейерштрасса функция $|N(e)|$ достигает своего наименьшего значения $\overline{m}$ в некоторой точке $e^* \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)$. Следовательно, для любого $e \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)$ выполняется $|N(e)| \ge |N(e^*)| = \overline{m} > 0$.

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} O(\rho|e|) = 0$ равномерно относительно $e$ $(|e| \le \Omega, \Omega > 1)$, то найдется такое $\delta > 0$, что при любом $\rho \in (0, \delta)$ и при любом $e \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)$ выполняется неравенство $0 < \left|O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| < \dfrac{\overline{m}}{2}$. Тогда для любого $e \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)$ и любого $\rho \in (0,\delta)$ имеет место $\left|N(e) + O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| \geq \left|N(e)\right| - \left|O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| > \dfrac{\overline{m}}{2} > 0$.

Следовательно, в $\varepsilon$ -окрестности точки $e_0$ при любом $\rho \in (0,\delta)$ уравнение (3) не имеет решений. А это значит, что уравнение (1) не имеет решений на множестве $\left\{\mu = \rho e : \rho \in (0,\delta), e \in \overline{U}(e_0, \varepsilon)\right\}$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если при любом векторе $e$, $\left|e\right| = 1$, $N(e) \neq 0$, то уравнение (1) не имеет ненулевых решений в достаточно малой окрестности нулевого.

**Доказательство.** Так как вектор-функция $e \to N(e)$ непрерывна на множестве $\overline{S} = \left\{e : \left|e\right| = 1\right\}$, то функция $e \to \left|N(e)\right|$ также непрерывна, следовательно, существует число $r_0 > 0$ такое, что $\left|N(e)\right| \geq r_0$ при любом $e \in \overline{S}$.

Поскольку $\lim\limits_{\rho \to 0} O\left(\rho\left|e\right|\right) = 0$ равномерно относительно $e$ $\left(\left|e\right| \leq \Omega, \Omega > 1\right)$, то существует такое $\delta > 0$, что при любом $\rho \in (0,\delta)$ и при любом $e \in \overline{S}$ выполняется $0 < \left|O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| < \dfrac{r_0}{2}$. Таким образом, для любого $e \in \overline{S}$ и любого $\rho \in (0,\delta)$ имеет место $\left|N(e) + O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| \geq \left|N(e)\right| - \left|O\left(\rho\left|e\right|\right)\right| > \dfrac{r_0}{2} > 0$.

Следовательно, на множестве $\left\{\mu = \rho e : \rho \in (0,\delta), e \in \overline{S}\right\}$ уравнение (1) не имеет ненулевых решений. Теорема доказана.

Предположим, что существует вектор $e^* = \left(e_1^*, e_2^*, ..., e_{r+m}^*\right)$, $|e^*| = 1$, такой, что $N\left(e^*\right) = 0$. Значению $e^*$ дадим приращение $\Delta e = \left(\Delta e_1, ..., \Delta e_{r+m}\right)$, которое выберем таким образом, чтобы $\left|\Delta e\right| \leq \overline{\sigma}$, где $\overline{\sigma} > 0$. Применяя формулу Тейлора, уравнение (3) запишем в виде

$$R\left(e^*\right)\Delta e + \sum_{i=2}^{p} C_i\left(e^*, \Delta e\right) + O\left(\rho\left|e\right|\right) = 0, \tag{4}$$

где $R\left(e^*\right)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $N(e)$ при $e = e^*, C_i\left(e^*, \Delta e\right)$ – вектор-форма $i$ -го порядка относительно $\Delta e$.

**Теорема 3.** Если $rang R\left(e^*\right) = r$, то уравнение (4) имеет решение и уравнение (1) имеет ненулевое решение.

**Доказательство** проводится с помощью теоремы о неподвижной точке.

Рассмотрим следующие случаи.

**I.** Пусть в уравнении (4) $rangR\left(e^*\right)=d$, $0<d<r$, $\Delta e=\rho_1\upsilon$, $\rho_1>0$. Тогда элементарными преобразованиями уравнение (4) можно свести к системе

$$\begin{cases} \rho_1\widetilde{L}\upsilon+o\left(\rho_1|\upsilon|\right)+O\left(\rho|e|\right)=0, \\ \rho_1^{\widetilde{p}}\widetilde{C}_{\widetilde{p}}\left(e^*,\upsilon\right)+o\left(\rho_1^{\widetilde{p}}|\upsilon|^{\widetilde{p}}\right)+O\left(\rho|e|\right)=0, \end{cases} \tag{5}$$

в которой $\widetilde{L}$ – известная $d\times(r+m)$-матрица, $\widetilde{C}_{\widetilde{p}}\left(e^*,\upsilon\right)$ – вектор-форма наименьшего порядка $\widetilde{p}$, $2\le\widetilde{p}\le p$, относительно $\upsilon$, $\widetilde{C}_{\widetilde{p}}\left(e^*,\upsilon\right)\not\equiv 0$, $\lim\limits_{\rho\to 0}O\left(\rho|e|\right)=0$ равномерно относительно $e$ $\left(|e|\le\Omega,\Omega>1\right)$. Вектор $\upsilon$ будем рассматривать удовлетворяющим неравенству $|\upsilon|\le\bar{k}$, $\bar{k}>1$ – некоторое число. Тогда $\lim\limits_{\rho_1\to 0}\dfrac{o\left(\rho_1|\upsilon|\right)}{\rho_1}=0$ и $\lim\limits_{\rho_1\to 0}\dfrac{o\left(\rho_1^{\widetilde{p}}|\upsilon|^{\widetilde{p}}\right)}{\rho_1^{\widetilde{p}}}=0$ равномерно относительно $\upsilon$ на множестве $\left\{\upsilon:|\upsilon|\le\bar{k}\right\}$. Пусть $\bar{L}\left(e^*,\upsilon\right)=colon\left(\widetilde{L}\upsilon,\widetilde{C}_{\widetilde{p}}\left(e^*,\upsilon\right)\right)$, $\widetilde{O}\left(\rho_1,\rho|e|\right)=colon\left(\dfrac{O\left(\rho|e|\right)}{\rho_1},\dfrac{O\left(\rho|e|\right)}{\rho_1^{\widetilde{p}}}\right)$. Заметим, что $\dfrac{o\left(\rho_1|\upsilon|\right)}{\rho_1}=\dfrac{o\left(\rho_1^{\widetilde{p}}|\upsilon|^{\widetilde{p}}\right)}{\rho_1^{\widetilde{p}}}=O\left(\rho_1\right)$, где $\lim\limits_{\rho_1\to 0}O\left(\rho_1\right)=0$ равномерно относительно $\upsilon$ на множестве $\left\{\upsilon:|\upsilon|\le\bar{k}\right\}$. Тогда систему (5) можно записать в виде $\bar{L}\left(e^*,\upsilon\right)+O\left(\rho_1\right)+\widetilde{O}\left(\rho_1,\rho|e|\right)=0$.

**Теорема 4.** Если для любого $\upsilon$, удовлетворяющего равенству $|\upsilon|=1$, $\bar{L}\left(e^*,\upsilon\right)\ne 0$, то в любой окрестности точки $\mu=0$ имеется множество, в котором нет решений уравнения (1).

**Теорема 5.** Если существует вектор $\upsilon_0$ такой, что $\bar{L}\left(e^*,\upsilon_0\right)\ne 0$**,** то в любой окрестности точки $\mu=0$ существует множество, в котором уравнение (1) не имеет решений.

Таким образом, необходимым условием существования решения операторного уравнения (1) является существование вектора $\upsilon$, $|\upsilon|=1$, при котором $\bar{L}\left(e^*,\upsilon\right)=0$.

Пусть существует вектор $\upsilon^*$, $\left|\upsilon^*\right|=1$, такой, что $\bar{L}\left(e^*,\upsilon^*\right)=0$. Значению $\upsilon^*$ дадим приращение $\Delta\upsilon$, которое выберем таким образом, чтобы $|\Delta\upsilon|\le\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma}>0$.

Тогда, разлагая вектор-функцию $\bar{L}\left(e^*,\upsilon\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\upsilon^*$, систему (5) приведем к виду

$$\begin{cases} \widetilde{L}\Delta\upsilon + O(\rho_1) + \dfrac{O(\rho|e|)}{\rho_1} = 0, \\ Q(e^*,\upsilon^*)\Delta\upsilon + \sum\limits_{i=2}^{\widetilde{p}} \overline{Q}_i(e^*,\upsilon^*,\Delta\upsilon) + O(\rho_1) + \dfrac{O(\rho|e|)}{\rho_1^{\widetilde{p}}} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $Q(e^*,\upsilon^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\widetilde{C}_{\widetilde{p}}(e^*,\upsilon)$ в точке $\upsilon = \upsilon^*$, $\overline{Q}_i(e^*,\upsilon^*,\Delta\upsilon)$ – вектор-форма $i$-го порядка относительно $\Delta\upsilon$.

Пусть $W(e^*,\upsilon^*) = \begin{pmatrix} \widetilde{L} \\ Q(e^*,\upsilon^*) \end{pmatrix}$.

**Теорема 6.** Если $rangW(e^*,\upsilon^*) = r$, то система (6) имеет решение и уравнение (1) имеет ненулевое решение.

Если $0 < rangW(e^*,\upsilon^*) < r$, то проводим рассуждения, аналогичные пункту I. Продолжая этот процесс далее, либо получим на некотором шаге теоремы, аналогичные теоремам 4, 5, 6, либо этот процесс будет бесконечен. Если $rangW(e^*,\upsilon^*) = 0$, то проводим рассуждения, аналогичные следующему пункту II.

**II.** Рассмотрим случай, когда в уравнении (4) $rangR(e^*) = 0$.

Уравнение (4) примет вид

$$C_{p_2}(e^*,\Delta e) + o(|\Delta e|^{p_2}) + O(\rho|e|) = 0, \tag{7}$$

где $C_{p_2}(e^*,\Delta e)$ $(2 \le p_2 \le p)$ – вектор-форма относительно $\Delta e$ наименьшего порядка $p_2$, не равная тождественно нулю.

Пусть существует вектор $\Delta e = u^*$, $|u^*| = 1$, такой, что $C_{p_2}(e^*,\Delta e) = 0$, и пусть $M(e^*,u^*)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $C_{p_2}(e^*,\Delta e)$ в точке $\Delta e = u^*$.

**Теорема 7.** Если $rangM(e^*,u^*) = r$, то уравнение (7) имеет решение и уравнение (1) имеет ненулевое решение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свирилина, Т.В.* Ненулевые решения системы конечномерных нелинейных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2006. – № 11. – С. 190–192.

*Московский государственный университет прикладной биотехнологии*

**УДК 517.929; 519.863.6; 519.863.2**

**П.М. Симонов**

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ (МЕТОД ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МОДЕЛЕЙ)*

Целью статьи является обзор применения эффективного метода исследования широкого класса функционально-дифференциальных уравнений с последействием (ФДУП) на устойчивость для динамических моделей микро- и макроэкономики.

Центральное место при изучении ФДУП занимают вопросы устойчивости и существования периодических режимов (траекторий) ФДУП, разработка общей теории которых еще далека от своего завершения. В связи с этим особенно актуальным является нахождение общих принципов исследования этих вопросов.

Зачастую при исследовании возникающих в приложениях конкретных классов ФДУП теоретические критерии устойчивости оказываются неэффективными, а имеющиеся достаточные условия – слишком грубыми. Сказанное определяет актуальность задачи создания эффективных критериев и признаков устойчивости и асимптотического поведения решений ФДУП. Теоретическое обоснование и практическая реализация эффективного подхода предполагают разработку специальных методов исследования, основанных на фундаментальных положениях общей теории ФДУП.

Цикл исследований пермских математиков посвящен разработке нового подхода к исследованию устойчивости и асимптотического поведения ФДУП. Предложенный подход позволяет исследовать динамические модели, представимые в виде ФДУП (как линейных, так и нелинейных).

Основная идея исследований состоит в следующем: по исходному объекту строится вспомогательный объект («модельное уравнение», «элементарная модель» (ЭМ)) с достоверно вычислимыми параметрами, допускающий эффективное исследование устойчивости. При этом успех исследования предопределен «адекватностью» ЭМ характеру изучаемого явления, процесса. После исследования ЭМ (модельного уравнения) окончательный результат зависит от «близости» исходной и элементарной моделей. Предлагаемый подход позволяет формулировать эффективно проверяемые условия, гарантирующие совпадение определенных свойств траекторий элементарной и исследуемой моделей. В случае, если эти условия не выполняются, строится новая, более близкая к исходной, модель и повторяется проверка условий. Реализация этого метода (разумеется, метод не универсален и ориентирован на определенный, но достаточно широкий класс моделей) позволяет сводить

* Материалы Всероссийской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения И.П. Макарова (1906–1984) и 55-летию создания кафедры математического анализа Рязанского государственного университета. – Рязань, 2006.

исследование конкретной модели к исследованию ЭМ, которую приходится строить и использовать неоднократно.

В работах [1]–[5] для случая непрерывного распределенного запаздывания предложено использовать операторы Вольтерры, которые являются операторами Коши некоторых элементарных ФДУП, возникающих в экономических задачах. Как известно, в динамических моделях экономики используют инерционные и дискретные запаздывания между входными и выходными процессами. При этом инерционные запаздывания первого порядка определяют бесконечно длящиеся переходные процессы, что не всегда адекватно реальным процессам. Нами предложено моделировать запаздывание между входным и выходным процессом линейным дифференциальным уравнением (элементарной моделью) вида

$$Ty'(t) + y([t/T]T) = x(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $T$ – время (лаг) запаздывания (переходного процесса), $[t/T]$ – целая часть числа $t/T$, $x(t)$ – входной процесс, $y(t)$ – выходной процесс. Ниже для простоты изложения будем считать все функции заданными при $t \geq 0$. В случае $x(t) \equiv 1$ и $y(0) = 0$ решение уравнения (1) имеет вид $y(t) = t/T$ при $0 \leq t \leq T$ и $y(t) = 1$ при $t > T$. Таким образом, переход из состояния 0 в состояние 1 происходит по линейной зависимости за время $T$.

В статьях [2], [3], [5] с учетом предложенного выше выведены модификации известных моделей микро- и макроэкономики: модель Вальраса-Эванса-Самуэльсона (ВЭС) рынка одного товара с учетом запаздывания цен спроса и предложения; модель ВЭС рынка одного товара с учетом запаздывания спроса от предложения, а также с учетом запаздывания цены спроса от цены предложения [23]; модель Маршалла рынка одного товара с учетом запаздывания предложения и запаздывания цены предложения; модель Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения и с зависимостью спроса и предложения от цены и скорости изменения цены; модель ВЭС рынка одного товара с учетом отклонения запаса от заданного уровня и с учетом запаздывания цены; модель ВЭС рынка нескольких товаров с учетом запаздывания цен предложения и спроса; модель Видала-Вулфа (ВВ) объема сбыта одного товара в зависимости от расходов на рекламу и модель ВВ объема сбыта двух взаимодополняющих товаров в зависимости от расходов на рекламу; модель динамики уровня основных производственных фондов (ОПФ), производственного капитала с учетом выбытия и запаздывания освоения инвестиций; модель управляемого производства в зависимости от поступающих заказов и заданного уровня запасов на складе; модель формирования связанных установок поведения индивидов с учетом запаздывания реакции; простейшая линейная модель динамики чистого внутреннего продукта (ЧВП) с учетом запаздывания ввода индуцированных инвестиций; нелинейная модель Филлипса-Гудвина (ФГ) динамики ЧВП; линейная односекторная модель динамики валового внутреннего продукта (ВВП); ранняя модель Калецкого динамики ВВП и ОПФ с учетом амортизации; неоклассическая нелинейная односекторная модель Рамсея-Солоу-Свена (РСС) динамики ВВП с учетом запаздывания ввода инвестиций; неоклассическая нелинейная односекторная модель РСС динамики ВВП с акселератором и с учетом запаздывания ввода инвестиций; неоклассическая нелинейная двухсекторная модель с запаздыванием ввода инвестиций; неоклассическая нелинейная модель Занга динамики ВВП с учетом запаздывания ввода инвестиций и образования человеческого капитала (ЧК); неоклассическая нелинейная двухсекторная модель Удзавы-Лукаса динамики ВВП и ЧК с учетом запаздывания ввода инвестиций в ОПФ и с учетом запаздывания образования ЧК; неоклассическая нелинейная односекторная модель Тобина-Сидрауски динамики ВВП с учетом денежного рынка.

В статье [5] проведено исследование устойчивости решений ряда линейных и нелинейных ФДУП, возникающих в моделях микро- и макроэкономики: линейная модель ВЭС рынка одного товара с учетом запаздывания цены; линейная и нелинейная модели ВЭС рынка одного товара с кусочно линейным запаздыванием цены предложения; линейные модели Маршалла и Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения; линейная модель ВВ объема сбыта товара в зависимости от расходов на рекламу; линейная модель динамики ОПФ с равномерным начислением амортизации; модель управляемого производства в зависимости от поступающих заказов и заданного уровня запасов на складе; простейшая линейная модель динамики ЧВП с учетом запаздывания ввода индуцированных инвестиций; линейная и нелинейная модели ФГ динамики ЧВП; линейная односекторная модель динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации; линейная односекторная модель РСС динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации; нелинейная модель ВЭС рынка одного товара с кусочно линейным запаздыванием цены предложения; нелинейная модель Аллена рынка одного товара с учетом запаздывания предложения; нелинейная односекторная модель динамики ВВП с равномерным начислением амортизации; неоклассическая нелинейная односекторная модель РСС динамики ВВП с равномерным способом начисления амортизации.

**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-96016-р2004урал_а, 04-06-96002-р2004урал_а, 06-01-00744-а, 06-01-72020-МНТИ_а, 07-01-9606-р_урал_а, 07-06-96028-р_урал_а), программы «Университеты России» (ур.03.01.238) и ЗАО «ПРОГНОЗ».**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симонов, П.М.* Динамические математические модели с последствием в экономике и биологии // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9. – Вып. 3. – С. 654–655.
2. *Симонов, П.М.* О некоторых динамических моделях микроэкономики // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. – Пермь; Перм. гос. техн. ун-т, 2002. – С. 109–114.
3. *Симонов, П.М.* О некоторых динамических моделях макроэкономики // Экономическая кибернетика: математические и инструментальные методы анализа прогнозирования и управления: сборник статей. – Пермь; Перм. гос. техн. ун-т, 2002. – С. 213–231.
4. *Симонов, П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей // Развитие проф. образования в XXI веке: сборник статей. – Пермь; Перм. колледж экономики, статистики и информатики. – 2002. – С. 135–144.

5. *Симонов, П.М.* Исследование устойчивости решений некоторых динамических моделях микро- и макроэкономики // Вестник Пермского ун-та. Математика. Информатика. Механика. – Пермь; Перм. гос. техн. ун-т, 2003. – С. 88–93.

*Пермский государственный университет*

**УДК 517.925**

**М.Т. Терёхин**

# БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуется проблема бифуркации рождения цикла из состояния равновесия при условии, что матрица системы линейного приближения в критическом случае имеет нулевые, чисто мнимые собственные значения любой кратности.

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x} = A(\lambda)x + f(x, \lambda), \tag{1}$$

в которой $x$ – $n$-мерный вектор, $\lambda$ – $m$-мерный вектор-параметр, $A(\lambda)$ – $n \times n$-матрица, $f(x, \lambda)$ – $n$-мерная вектор-функция.

Проблема рождения цикла из состояния равновесия рассматривалась в ряде работ. Основополагающие результаты получены в [1, 2] при условии, что $n = 2$, матрица $A(\lambda)$ имеет собственные значения $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$, $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) \neq 0$, $\alpha'(0) \neq 0$ (бифуркация Андронова-Хопфа). При условии, что $n > 2$, $\pm i\beta(0)$ – собственные значения матрицы $A(0)$, среди остальных собственных значений нет кратных числам $\pm i\beta(0)$, проблема бифуркации рождения цикла исследовалась в работах [3, 4]. Аналогичная проблема рассматривалась в работе [5] в предположении, что матрица системы линейного приближения имеет только чисто мнимые и нулевые собственные значения.

В статье проблема рождения цикла из состояния равновесия исследуется при условии, что матрица $A(0)$ системы (1) может иметь нулевые, чисто мнимые собственные значения любой кратности и собственные значения с ненулевыми действительными частями.

Введем следующие обозначения: $|v| = \max\limits_{j}\{|v_j|\}$, $|v(\cdot)| = \sup\limits_{t\in[0,T]}|v(t)|$, $\|C\| = \sup\limits_{|v|\leq 1}|Cv|$, $\|C(\cdot)\| = \sup\limits_{t\in[0,T]}\|C(t)\|$, $v$ – вектор, $C$ – матрица, $v(t)$ – вектор-функция, $C(t)$ – матричная функция, определенные на сегменте $[0;T]$, $D(\delta_0) =$

$= \{ (x,\lambda) : x \in E_n, \lambda \in E_m, |x| \le \delta_0, |\lambda| \le \delta_0 \}$, $W(\delta_0) = \{ \alpha \in E_n : |\alpha| \le \delta_0 \}$, $\Lambda(\delta_0) =$
$= \{ \lambda \in E_m : |\lambda| \le \delta_0 \}$, $T$, $\delta_0$ – некоторые положительные числа, $\gamma = (\alpha, \lambda)$.

Будем предполагать, что на множестве $D(\delta_0)$ матрица $A(\lambda)$ и вектор-функция $f(x,\lambda)$ определены и непрерывны, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,\lambda)/|x| = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, система (1) обладает свойством единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметра.

Пусть $M$ – непустое множество всех чисто мнимых собственных значений матрицы $A(0)$ (не исключается, что матрица $A(0)$ может иметь и нулевые собственные значения). Тогда $\mathrm{M} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} M_j$, $1 \le p \le [n/2]$, $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$, $M_j$ – множество всех чисто мнимых собственных значений, коэффициенты которых при $i$ соизмеримы. Очевидно, что $M_j \cap M_k = \emptyset$ при $j \ne k$.

Фиксируем некоторое число $s \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Пусть элементами множества $M_s$ являются числа $\pm i\beta_{s1}$, $\pm i\beta_{s1}$, …, $\pm i\beta_{sq_s}$. Тогда существует набор целых положительных чисел $k_{s1}$, $k_{s2}$, …, $k_{sq_s}$ такой, что $k_{s1}\beta_{s1} = k_{s2}\beta_{s2} = \ldots = k_{sq_s}\beta_{sq_s} = \omega_{s0}$.

Заметим, что определение, все утверждения и выводы будут сформулированы для фиксированного числа $s \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Символом $x(t,\alpha,\lambda)$ обозначим решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0,\alpha,\lambda) = \alpha$. Очевидно, что $x \equiv 0$ – решение системы (1). Тогда существует число $\delta^* \in (0, \delta_0]$, при котором для любых $\alpha \in W(\delta^*)$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ решение $x(t,\alpha,\lambda)$ определено на сегменте $[0, T_s + \mu_0]$ и удовлетворяет неравенству $|x(t,\alpha,\lambda)| \le \delta_0$, $T_s = \frac{2k_s\pi}{\omega_{s0}}$, $k_s = НОК\{k_{s1}, k_{s2}, \ldots, k_{sq_s}\}$, $\mu_0 > 0$ – некоторое число.

**Определение.** Будем говорить, что имеет место бифуркация рождения цикла системы (1), если для любого числа $\delta \in (0, \delta^*]$ существуют векторы $\alpha \in W(\delta)$, $\alpha \ne 0$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и число $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ такие, что выполнено равенство

$$x(T_s + \mu, \alpha, \lambda) = \alpha. \tag{2}$$

Ставится задача – определить условия, при которых имеет место бифуркация рождения цикла системы (1).

Пусть $B(\lambda) = A(\lambda) - A(0)$. Тогда, полагая $A(0) = A$, систему (1) запишем в виде

$$\dot{x} = Ax + B(\lambda)x + f(x, \lambda), \qquad (3)$$

Решение $x(t, \alpha, \lambda)$ системы (3) можно представить так:

$$x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)[B(\lambda)\, x(\xi, \alpha, \lambda) + f(x(\xi, \alpha, \lambda), \lambda)]\, d\xi, \qquad (4)$$

$X(t),\ X(0) = E$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$.

Следовательно, для того чтобы имела место бифуркация рождения цикла системы (3), необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\delta \in (0, \delta^*]$ существовали векторы $\alpha \in W(\delta)$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и число $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, удовлетворяющие равенству

$$(X(T_s + \mu)\text{-}E)\alpha + X(T_s + \mu)\int_0^{T_s+\mu} X^{-1}(t)[B(\lambda)x(t, \alpha, \lambda) + f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)]dt = 0. \qquad (5)$$

**Теорема 1**. Существует число $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ такое, что для любой точки $(\alpha, \lambda) \in W(\delta_1) \times \Lambda(\delta_1)$ решение $x(t, \alpha, \lambda)$ системы (3) можно представить равенством $x(t, \alpha, \lambda) = X(t)\alpha + o(|\gamma|)$, $\lim\limits_{\gamma \to 0} o(|\gamma|)/|\gamma| = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T_s + \mu_0]$.

**Доказательство.** Из условия $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda)/|x| = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ следует существование числа $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ такого, что при любых $(x, \lambda) \in D(\delta_1)$ $|f(t, x, \lambda)| < a|x|$, $a > 0$ – некоторое число. Тогда

$$|x(t, \alpha, \lambda)| \leq |\alpha| + \int_0^t (\|B\||x(\xi, \alpha, \lambda)| + a|x(\xi, \alpha, \lambda)|)d\xi \leq |\alpha| + (\|B\| + a)\int_0^t |x(\xi, \alpha, \lambda)|d\xi,$$

где $\|B\| = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda(\delta_0)} \|B(\lambda)\|$.

По лемме Гронуолла-Беллмана [6. С. 108] $|x(t, \alpha, \lambda)| \leq |\alpha|\, (\exp\|\mathrm{B}\| + a)(T_s + \mu_0)$. Следовательно, $|x(t, x, \lambda)|/|\alpha|$ ограничено на множестве $[0, T_s + \mu_0] \times W(\delta_1) \times \Lambda(\delta_1)$ и $\lim\limits_{\alpha \to 0} x(t, x, \lambda) = 0$ равномерно на множестве $[0, T_s + \mu_0] \times \Lambda(\delta_1)$.

Убедимся, что $\lim\limits_{\gamma \to 0} \frac{1}{|\gamma|} X(t)\int_0^{\mathrm{t}} X^{-1}(\xi)[B(\lambda)x(\xi, \alpha, \lambda) + f(x(\xi, \alpha, \lambda), \lambda)]\, d\xi = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T_s + \mu_0]$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$

произвольное, но фиксированное число. Так как $\lim\limits_{\lambda \to 0} B(\lambda) = 0$, то существует число $\bar{\delta} > 0$ такое, что при любом $\lambda \in \Lambda(\bar{\delta})$ $\|B(\lambda)\| < \varepsilon$. Из того, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda)/|x| = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, следует, что существует число $\delta_2 > 0$, при котором для любых $x$ ($|x| \le \delta_2$) $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $|f(x, \lambda)|/|x| < \varepsilon$.

Кроме того, $\lim\limits_{\alpha \to 0} x(t, x, \lambda) = 0$ равномерно на множестве. Следовательно, число $\bar{\delta} > 0$ можно выбрать так, что при любых $(\alpha, \lambda) \in$ $(\alpha, \delta) \in W(\bar{\delta}) \times \Lambda(\bar{\delta})$ равномерно относительно $t \in [0, T_s + \mu_0]$ $|x(t, \alpha, \lambda)| \le \delta_2$, $\dfrac{|f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)|}{x(t, \alpha, \lambda)} < \varepsilon$.

Таким образом, для любой точки $(\alpha, \lambda) \in W(\bar{\delta}) \times \Lambda(\bar{\delta})$ ($|\gamma| \le \bar{\delta}$)

$$\left| \frac{1}{|\gamma|} X(t) \int_0^t X^{-1}(\xi) \left[ B(\lambda) x(\xi, \alpha, \lambda) + f(x(\xi, \alpha, \lambda), \lambda) \right] d\xi \right| \le$$

$$\le \|X(\cdot)\| \left\| X^{-1}(\cdot) \right\| \int_0^t \left[ \|B(\lambda)\| \frac{|x(\xi, \alpha, \lambda)|}{|\alpha|} + \frac{|f(x(\xi, \alpha, \lambda), \lambda)|}{|x(\xi, \alpha, \lambda)|} \frac{|x(\xi, \alpha, \lambda)|}{\alpha} \right] \frac{|\alpha|}{|\gamma|} d\xi \le$$

$$\le \|X(\cdot)\| \left\| X^{-1}(\cdot) \right\| \exp\left[ (\|B\| + \alpha)(T_s + \mu_0) \right] 2 (T_s + \mu_0) \varepsilon .$$

А это значит, что в силу равенства (4) $x(t, \alpha, \lambda) = X(t)\alpha + o(|\gamma|)$. Теорема доказана.

Отметим, что согласно свойствам вектор-функции $f(x, \lambda)$ $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda)}{|\alpha|} = 0$ равномерно относительно $(t, \lambda) \in [0, T_s + \mu_0] \times \Lambda(\delta^*)$.

На основании теоремы 1 и равенства (4) решение $x(t, \alpha, \lambda)$ системы (3) можно представить так:

$$x(t, \alpha, \lambda) = X(t)\alpha + X(t) \int_0^t X^{-1}(\xi) \left\{ B(\lambda) \left[ X(\xi)\alpha + o(|\gamma|) \right] + f(x(t, \alpha, \lambda), \lambda) \right\} d\xi .$$

Пусть $f(x, \lambda) = f_d(x, \lambda) + o\left(|z|^d\right)$, $f_d(x, \lambda)$ – форма порядка $d$ относительно $(x, \lambda)$, $z = (x, \lambda)$, $P = X(T_s) - E$, $Q(\mu) = X(T_s + \mu) - X(T_s)$, $B^*(\lambda) =$ $= X(T_s) \int_0^{T_s} X^{-1}(t) B(\lambda) X(t) dt$, $\bar{f}_d(\alpha, \lambda) = X(T_s) \int_0^{T_s} X^{-1}(t) f_d(X(t)\alpha, \lambda) dt$. Очевидно, что $\lim\limits_{\mu \to 0} Q(\mu) = 0$. Равенство (5) примет вид

$$P\alpha + B^*(\lambda)\alpha + \bar{f}_d(\alpha, \lambda) + \varphi(\mu, \alpha, \lambda) + o\left(|\gamma|^d\right) = 0, \tag{6}$$

в котором $\lim\limits_{\mu\to 0}\bar f_d(\alpha,\lambda)/|\alpha| = 0$ равномерно относительно $\lambda\in\Lambda(\delta^*)$, $\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(\mu,\alpha,\lambda) = 0$ равномерно относительно $(\alpha,\lambda)\in W(\delta^*)\times\Lambda(\delta^*)$.

Из свойств матрицы $A$ следует, что $\det P = 0$.

**1.** Пусть $rangP = r$, $0\le r < n$. Заменой переменных $\alpha = L\beta$ (при $r = 0$ $\alpha = \beta$), в которой $L$ – $n\times(n-r)$-матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения система $P\alpha = 0$, система (6) может быть сведена к системе

$$B_1(\lambda)\beta + \bar f_d(L\beta,\lambda) + \varphi(\mu, L\beta,\lambda) + o(|\gamma|^d) = 0, \qquad (7)$$

$B_1(\lambda) = B^*(\lambda)L$.

Пусть $m\ge n$ и пусть векторы $u = (\lambda_{u_1},\lambda_{u_2},\dots,\lambda_{u_n})$, $\vartheta = (\lambda_{\vartheta_1},\lambda_{\vartheta_2},\dots,\lambda_{\vartheta_{m-n}})$ таковы, при любых $i$, $j$ $\lambda_{u_i}$, $\lambda_{\vartheta_j}$ – координаты вектора $\lambda$, $\lambda_{u_i}\ne\lambda_{\vartheta_j}$, при $i<j$ $u_i<u_j$, $\vartheta_i<\vartheta_j$. В частности, если $m = n$, то $\lambda = u$.

**Теорема 2**. Пусть

1) матрица $B_1(\lambda)$ представима равенством $B_1(\lambda) = K(\lambda) + o(|\lambda|)$, $K(\lambda) = ((k_{ij},\lambda))_{11}^{nm}$, $k_{ij} = (k_{ij}^1, k_{ij}^2,\dots,k_{ij}^m)$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, $\lim\limits_{\lambda\to 0} o(|\lambda|)/|\lambda| = 0$;

2) существуют вектор $u$ и $n-r$-мерный вектор $e^*$ ($|e^*| = 1$) такие, что $K(\lambda) = \bar D(u) + C(\vartheta)$, $\det Y(e^*)\ne 0$, матрица $Y(\beta)$ определяется равенством $\bar D(u)\beta = Y(\beta)u$.

Тогда имеет место бифуркация рождения цикла системы (3).

**Доказательство.** Положим $\beta = \rho\, \mathring{a}^*$, $\rho > 0$. Тогда с учетом условий теоремы и того, что $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\bar f_d(L\beta,\lambda)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\bar f_d(L\beta,\lambda)}{|\beta|}\frac{|\beta|}{\rho} = 0$ равномерно относительно $\lambda\in\Lambda(\delta^*)$, $\lim\limits_{\mu\to 0}\varphi(\mu,L\beta,\lambda) = 0$ равномерно относительно $\beta$ ($L\beta\in W(\delta^k)$), $\lambda\in\Lambda(\delta)$, систему (7) можно записать так:

$$Y(e^*)\,u + C(\vartheta)e^* + O(\rho) + O(\mu) + o(|\lambda|)e^* = 0.$$

Оператор $F$ определим равенством

$$Fu = -Y^{-1}(e^*)\left[C(\vartheta)e^* + O(\rho) + O(\mu) + o(|\lambda|)e^*\right].$$

Убедимся, что существуют числа $\delta_1\in(0,\delta^*]$, $\delta_2\in(0,\delta_1]$, $\rho_1>0$, $\mu_1\in(0,\mu_0]$

такие, что при любых фиксированных $\rho \in (0, \rho_1]$, $|\mu| \in (0, \mu_1]$, $\vartheta$ ($|\vartheta| \le \delta_2$) оператор $F$ на множестве $\{u : |u| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку.

Действительно, из того, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \left(Y^{-1}(e^*) o(|\lambda|) e^*\right) / |\lambda| = 0$, следует, что число $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ можно выбрать так, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_1)$ $\left|Y^{-1}(e^*) o(|\lambda|) e^*\right| < \delta_1/4$.

Так как $\lim\limits_{\vartheta \to 0} Y^{-1}(e^*) C(\vartheta) e^* = 0$, то существует число $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, при котором для любого $\vartheta$ ($|\vartheta| \le \delta_2$) $\left|Y^{-1}(e^*) C(\vartheta) e^{**}\right| < \delta_1/4$. Кроме того, из равенств $\lim\limits_{\rho \to 0} Y^{-1}(e^*) \mathrm{O}(\rho) = 0$, $\lim\limits_{\mu \to 0} Y^{-1}(e^*) \mathrm{O}(\mu) = 0$ следует существование чисел $\rho_1 > 0$, $\mu_1 \in (0, \mu_0]$ таких, что при любых $\rho \in (0, \rho_1]$, $|\mu| \in (0, \mu_1]$ $\left|Y^{-1}(e^*) O(\rho)\right| < \delta_1/4$, $\left|Y^{-1}(e^*) O(\mu)\right| < \delta_1/4$.

Следовательно, при любых фиксированных $\vartheta_2$ ($|\vartheta_2| \le \delta_2$), $\rho \in (0, \rho_1]$, $\mu$ ($|\mu| \in (0, \mu_1]$) и любом $u$ ($|u| \le \delta_1$, $|\lambda| \le \delta_1$), $|Fu| < \delta_1$.

Из свойств правой части системы (3) следует, что оператор $F$ на множестве $\{u : |u| \le \delta_1\}$ непрерывен.

Таким образом, на множестве $\{u : |u| \le \delta_1\}$ существует неподвижная точка оператора $F$.

Фиксируем $\vartheta^*$ ($|\vartheta^*| \le \delta_2$), $\rho^* \in (0, \rho_1]$, $\mu^*$ ($|\mu^*| \in (0, \mu_1]$). Пусть $\vartheta_1^*$ – неподвижная точка оператора $F$. А это значит, что векторы $\alpha^* = L\rho^* e^*$ ($\alpha^* \ne 0$), $\lambda^* = (u^*, \vartheta^*)$ и число $\mu^*$ ($|\mu^*| \in (0, \mu_1]$), удовлетворяют равенству (5), $x(t, \alpha^*, \lambda^*)$ – ненулевое $T_s + \mu^*$-периодическое решение (цикл) системы (3). Теорема доказана.

**2.** Предположим, что $B^*(\lambda)\alpha + \bar{f}_d(\alpha, \lambda) + o(|\gamma|^d) = q_k(\alpha, \lambda) + o(|\gamma|^k)$, $q_k(\alpha, \lambda)$ – вектор-форма порядка $k \ge 2$ относительно $\alpha$, $\lambda$. Тогда система (6) может быть записана так

$$P\alpha + q_k(\alpha, \lambda) + \varphi(\mu, \alpha, \lambda) + o(|\gamma|^k) = 0. \tag{8}$$

Снова предположим, что $rang P = r$, $0 \le r < n$. Рассмотрим сначала случай, когда $r \in (0, n)$. Элементарными преобразованиями систему (8) можно свести к системе

$$P_1\alpha + q_k^{\ *}(\alpha, \lambda) + \varphi^{\ *}(\mu, \alpha, \lambda) + o^*\left(\|\gamma\|^k\right) = 0,$$
$$q_k^{\ **}(\alpha, \lambda) + \varphi^{\ **}(\mu, \alpha, \lambda) + o^{**}\left(\|\gamma\|^k\right) = 0, \tag{9}$$

в которой $P_1$ – $r\times n$-матрица.

Символом $O_{r\times m}$ обозначим нулевую $r\times m$-матрицу. Тогда $P_0 = P_1O_{r\times m}$ – $r\times(n+m)$-матрица. Выполним замену переменных $\gamma = \rho e$, $\rho > 0$, $\alpha = \rho e_\alpha$, $\lambda = \rho e_\lambda$, $|e| \le \Delta$, $\Delta > 1$ – некоторое число. Тогда систему (9) можно записать так

$$P_0 e + \rho^{\ k-1} q_k^{\ *}(e) + \tfrac{1}{\rho}\varphi^{\ *}(\mu, \gamma) + o\left(\rho^{\ k-1}|e|^k\right) = 0,$$
$$q_k^{\ **}(e) + \tfrac{1}{\rho^{\ k}}\varphi^{\ **}(\mu, \gamma) + O(\rho) = 0. \tag{10}$$

**Теорема 3.** Если при любом $e$ ($|e| = 1$), $colon\left(P_0 e, q_k^{\ *}(e)\right) \ne 0$, то для любого числа $\delta > 0$ существует число $\sigma > 0$ такое, что в $\delta$-окрестности точки $\gamma = 0$ имеется множество, в котором нет решений системы (10) при любом $\mu$ ($|\mu| \le \sigma$).

**Доказательство** проводится с использованием теоремы Вейерштрасса о достижимости непрерывной функцией своих верхней и нижней граней на компакте.

Пусть существует вектор $e^*$ ($\left|e^*\right| = 1$) такой, что $colon\left(P_0 e^*, q_k^{\ **}\left(e^*\right)\right) = 0$. Тогда систему (10) можно записать так:

$$P_0\tau + \tfrac{1}{\rho}\varphi^{\ *}(\mu, \gamma) + \mathrm{O}\left(\rho^{\ k-1}\right) = 0,$$
$$D\left(e^*\right)\tau + \sum_{i=2}^{k} P_i\left(e^*, \tau\right) + \tfrac{1}{\rho^{\ k}}\varphi^{\ **}(\mu, \gamma) + \mathrm{O}(\rho) = 0, \tag{11}$$

$\tau = e - e^*$, $D\left(e^*\right)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\mathrm{q}_k^{\ **}(e)$ в точке $e = e^*$, при любом $i \in \{2, ..., k\}$ $P_i\left(e^*, \tau\right)$ – форма порядка $i$ относительно $\tau$.

**Теорема 4.** Если $rang\ colon\left(P_0, D\left(e^*\right)\right) = n$, то существуют вектор $\tau^{\ *}$ и числа $\rho^{\ *} > 0$, $\mu^{\ *} > 0$, удовлетворяющие системе (11).

**Доказательство** проводится методом неподвижной точки.

**Теорема 5.** Если выполнены условия теоремы 3, $e_\alpha^* \ne 0$, то имеет место бифуркация рождения цикла системы (3).

**Доказательство.** Согласно теореме 3 существуют векторы $\alpha^{\ *} = \rho^{\ *}\left(e_\alpha^* + \tau_{\ \alpha}^{\ *}\right)$ ($\left|\tau_{\ \alpha}^{\ *}\right| < \left|\mathrm{e}_\alpha^*\right|$), $\lambda^{\ *} = \rho^{\ *}\left(e_\lambda^* + \tau_{\ \lambda}^{\ *}\right)$ ($\tau^{\ *} = \left(\tau_{\ \alpha}^{\ *}, \tau_{\ \lambda}^{\ *}\right)$ и число $\mu^{\ *}$ ($\left|\mu^{\ *}\right| \in \left(0, \mu_{\ 0}\right]$), удовлетворяющие равенству (5). А это значит, что $x\left(t, \alpha^{\ *}, \lambda^*\right)$ – ненулевое $T_s + \mu^{\ *}$-периодическое решение (цикл) системы (3). Теорема доказана.

Предположим, что $P_j(e^*,\tau)$ – наименьшая нетождественно равная нулю форма порядка $j$ относительно $\tau$. Тогда $\sum_{i=2}^{k} P_i(e^*,\tau) = P_j(e^*,\tau) + o(\|\tau\|^j)$.

Пусть $Z = colon(P_0, D(e^*))$, $\bar{P}_j(e^*,\tau) = colon(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r}, P_j(e^*,\tau))$, $\bar{\varphi}(\rho,\mu,\gamma) = colon\left(\frac{1}{\rho}\varphi^*(\mu,\gamma), \frac{1}{\rho^k}\varphi^{**}(\mu,\gamma)\right)$, $\bar{o}(\|\tau\|^j) = colon(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r}, o(\|\tau\|^j))$, $\bar{O}(\rho) = colon(o(\rho), O(\rho))$. Система (11) примет вид

$$Z\tau + \bar{P}_j(e^*,r) + \bar{\varphi}(\rho,\mu,\gamma) + \bar{o}(\|\tau\|^j) + \bar{O}(\rho) = 0. \tag{12}$$

Пусть $rangZ = r_1 < n$. Очевидно, что $r \le r_1$. Элементарными преобразованиями систему (12) можно свести к системе

$$\begin{aligned} &Z_1\tau + \bar{P}_{1j}(e^*,\tau) + \bar{\varphi}_1(\rho,\mu,\gamma) + \bar{o}_1(\|\tau\|^j) + \bar{O}_1(\rho) = 0,\\ &\bar{P}_{2j}(e^*,\tau) + \bar{\varphi}_2(\rho,\mu,\gamma) + \bar{o}_2(\|\tau\|^j) + \bar{O}_2(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Положим $\tau = \rho_1\vartheta$, $\rho_1 > 0$. Тогда система (13) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} &Z_1\vartheta + O(\rho_1) + \frac{1}{\rho_1}\bar{\varphi}_1(\rho,\mu,\gamma) + \bar{o}_1(\rho_1) + \frac{1}{\rho_1}\bar{O}_1(\rho) = 0,\\ &\bar{P}_{2j}(e^*,\vartheta) + \frac{1}{\rho_1^j}\bar{\varphi}_2(\rho,\mu,\gamma) + \bar{o}_2(\rho_1) + \frac{1}{\rho_1^j}\bar{O}_2(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Условия существования (отсутствия) решения системы (14) определяются теоремами, аналогичными теоремам 2 и 3. Если же для (14) условия теорем, аналогичных теоремам 2 и 3, не выполнены, то предложенный в пункте 2 метод получения условий разрешимости системы (8), будет использован далее. Алгоритм поиска условий разрешимости системы (8) будет закончен, как только будет получена система уравнений, для которой справедливы теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3, в противном случае алгоритм продолжается неограниченно. В этом случае задача нахождения условий, при которых имеет место бифуркация цикла системы (3), предложенным в пункте 2 методом неразрешима.

Пусть $rangP = 0$. Тогда система (8) примет вид

$$q_k(\alpha,\lambda) + \varphi(\mu,\alpha,\lambda) + o(\|\gamma\|^k) = 0. \tag{15}$$

Для системы (15) справедливы теоремы 2, 3 и 4, в которых учтено, что $r = 0$. К системе (15) (в случае невыполнения условий теорем 2 и 3) также может быть применен метод нахождения условий ее разрешимости, предложенная в пункте 2, когда ранг матрицы системы линейного приближения вновь полученной системы равен нулю.

**3.** Предположим, что $B^*(\lambda)\alpha + \bar{f}_d(\alpha,\lambda) + \varphi(\mu,\alpha,\lambda) + o(\|\gamma\|^d) = \psi_p(\mu,\alpha,\lambda) + o(\|\omega\|^p)$, $\psi_p(\mu,\alpha,\lambda)$ – форма порядка p относительно переменных $\mu$, $\alpha$, $\lambda$, $\omega = (\mu,\alpha,\lambda)$. Тогда система (6) примет вид

$$P\alpha + \psi_p(\mu, \alpha, \lambda) + o\left(\|\omega\|^p\right) = 0 \tag{16}$$

Учитывая, что $rangP = r$, $0 \le r < n$, элементарными преобразованиями систему (16) можно свести к системе

$$\begin{gathered} P_1\alpha + \psi_p^*(\mu, \alpha, \lambda) + o_1\left(\|\omega\|^p\right) = 0, \\ \psi_p^{**}(\mu, \alpha, \lambda) + o_2\left(\|\omega\|^p\right) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть $O_{r\times m+1}$ – нулевая $r\times(m+1)$-матрица, тогда $P\alpha = P^*\omega$, $P^* = P_1 O_{r\times m+1}$ – $r\times(n+m+1)$-матрица. Выполним замену переменных $\omega = \rho e$, $\rho > 0$, $|e| \le \Delta$, $\Delta > 1$ – некоторое число, $\alpha = \rho e_\alpha$, $\lambda = \rho e_\lambda$, $\mu = \rho e_\mu$. Система (17) запишется так:

$$\begin{gathered} P^* e + O_1(\rho) = 0, \\ \psi_p^{**}(e) + O_2(\rho) = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

**Теорема 6.** Если при любом $e$ ($|e| = 1$) $colon\left(P^* e, \psi_p^{**}(e)\right) \ne 0$, то существует окрестность точки $\omega = 0$, в которой нет ненулевого решения (17).

**Доказательство** основано на теореме Вейерштрасса о достижимости непрерывной функцией своих верхней и нижней граней на компакте. Устанавливается, что существует число $\rho^* > 0$ такое, что при любом $\rho \in (0, \rho^*)$ во множестве $\left\{\omega : \omega = \rho e, |e| = 1, \rho < \rho^*\right\}$ $\left|colon\left(P^* e, \psi_p^{**}(e)\right) + colon(O_1(\rho), O_2(\rho))\right| > 0$.

Непосредственно из теоремы 6 следует

**Теорема 7.** Если выполнены условия теоремы 6, то не имеет место бифуркация рождения цикла системы (3).

Пусть существует вектор $e^*$ ($\left|e^*\right| = 1$) такой, что $colon\left(P^* e^*, \psi_p^{**}\left(e^*\right)\right) = 0$. Тогда систему (18) можно представить так:

$$\begin{gathered} P^* y + O_1(\rho) = 0, \\ D^*\left(e^*\right) y + \sum_{i=2}^{p} P_i^*\left(e^*, y\right) + O_2(\rho) = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где $y = e - e^*$, $D^*\left(e^*\right)$ – значение матрицы Якоби вектор-функции $\psi_p^{**}\left(e^*\right)$ в точке $e^*$, при любом $i \in \{2, \ldots, p\}$ $P_i^*\left(e^*, y\right)$ – форма порядка $i$ относительно $y$.

Положим $S = colon\left(P^*, D^*\left(e^*\right)\right)$, $\sum_{i=2}^{p} \overline{P}_i\left(e^*, y\right) = colon(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}, \sum_{i=2}^{p} P_i^*(e^*, y))$, $O(\rho) = colon(O_1(\rho), O_2(\rho))$.

Система (19) запишется в виде

$$Sy+\sum_{i=2}^{p}\overline{P}_i\left(e^*,y\right)+O(\rho)=0 \quad . \tag{20}$$

**Теорема 8.** Если $rangS=n$, то существует число $\delta>0$ такое, что в $\delta$-окрестности точки $\omega=0$ система (20) имеет ненулевое решение.

**Доказательство.** Для простоты рассуждений положим $S=\left(M_1,M_2\right)$, $M_1$ – $n\times n$-матрица, $\det M_1\neq 0$, $M_2$ – $n\times\left(m+1\right)$-матрица. Тогда $Sy=M_1y_1+M_2y_2$, $y=\left(y_1,y_2\right)$.

Оператор $\tilde{A}$ определим равенством

$$\Gamma y_1=-M_1^{-1}\left[M_2y_2+\sum_{i=2}^{p}\overline{P}_i\left(e^*,y\right)+O(\rho)\right].$$

Заметим, что $\sum_{i=2}^{p}\overline{P}_i\left(e^*,y\right)=o\left(\left|y_1\right|\right)+O\left(y_1,y_2\right)$, $\lim\limits_{y_1\to 0}o\left(\left|y_1\right|\right)/\left|y_1\right|=0$, $\lim\limits_{y_2\to 0}O\left(y_1,y_2\right)=0$ равномерно относительно $y_1\in\left\{y_1:\left|y_1\right|\leq 1+\Delta\right\}$.

Так как $\lim\limits_{y_1\to 0}M_1^{-1}o\left(\left|y_1\right|\right)=0$, то число $\delta>0$ можно выбрать так, что при любом $y_1$ ($\left|y_1\right|\leq\delta$) $\left|M_1^{-1}o\left(\left|y_1\right|\right)\right|<\delta/4$. Из того, что $\lim\limits_{y_2\to 0}O\left(y_1,y_2\right)=0$ равномерно относительно $y_1\in\left\{y_1:\left|y_1\right|\leq 1+\Delta\right\}$, следует, что число $\delta_1>0$ можно выбрать так, что при любом $y_2$ ($\left|y_2\right|\leq\delta_1$) и при любом $y_1$ ($\left|y_1\right|\leq 1+\Delta$) $\left|M_1^{-1}O\left(y_1,y_2\right)\right|<\delta/4$.

Кроме того, $\lim\limits_{y_2\to 0}M_1^{-1}M_2y_2=0$, $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho)=0$. Поэтому числа $\delta_1$, $\rho_1>0$ можно выбрать так, что при любых $y_2$ ($\left|y_2\right|\leq\delta_1$), $\rho\in\left(0,\rho_1\right)$ $\left|M_1^{-1}M_2y_2\right|<\delta/4$, $\left|M_1^{-1}O(\rho)\right|<\delta/4$. Следовательно, при любых фиксированных $y_2$ ($\left|y_2\right|\leq\delta_1$), $\rho\in\left(0,\rho_1\right)$ и любых $y_1$ ($\left|y_1\right|\leq\delta$) $\left|\Gamma y_1\right|<\delta$.

Из свойств правой части системы (3) следует, что оператор $\tilde{A}$ на множестве $\left\{y_1:\left|y_1\right|\leq\delta\right\}$ непрерывен. Таким образом, на множестве $\left\{y_1:\left|y_1\right|\leq\delta\right\}$ оператор $\tilde{A}$ имеет неподвижную точку.

Фиксируем $y_2^*$ ($\left|y_2^*\right|\leq\delta_1$), $\rho^*\in\left(0,\rho_1\right)$. Пусть $y_1^*$ – неподвижная точка оператора $\tilde{A}$, $\left|y_1^*\right|<\delta$. Следовательно, точка $y^*=\left(y_1^*,y_2^*\right)$ и число $\rho^*$ удовлетворяют системе (20). Числа $\delta$, $\delta_1$ можно выбрать так, что будет выполнено неравенство $\left|\omega^*\right|=\rho^*\left|e^*+y^*\right|>0$. Теорема доказана.

**Теорема 9.** Если выполнены условия теоремы 8 и $e_\alpha^* \neq 0$, то имеет место бифуркация рождения цикла системы (3).

**Доказательство.** Согласно теореме 8 существуют векторы $\alpha^* = \rho^*\left(e_\alpha^* + y_\alpha^*\right)$, $\lambda^* = \rho^*\left(e_\lambda^* + y_\lambda^*\right)$ ($\left|y_\alpha^*\right| < \left|e_\alpha^*\right|$) и число $\mu^* = \rho^*\left(e_\mu^* + y_\mu^*\right)$ ($y^* = \left(y_\alpha^*, y_\lambda^*, y_\mu^*\right)$, $y^* = \left(y_1^*, y_2^*\right)$), удовлетворяющие системе (16), а $x\left(t, \alpha^*, \lambda^*\right)$ – ненулевое, $T_s + \mu^*$ -периодическое решение (цикл) системы (3).

Предположим, что $rang\, S = r_1 < n$. Очевидно, что $r_1 \geq r \geq 0$. Система (20) элементарными преобразованиями может быть сведена к системе

$$S_1 y + \sum_{i=2}^{p} \overline{P}_i^*(e^*, y) + O^*(\rho) = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{p} \overline{P}_i^{**}(e^*, y) + O^{**}(\rho) = 0. \tag{21}$$

Применяя к системе (21) алгоритм, рассмотренный в пункте 2, получим условия наличия или отсутствия бифуркации рождения цикла системы (3).

**4.** Бифуркация Андронова-Хопфа [3], [4].

Пусть $m = 1$ и пусть $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ – собственные значения матрицы $A(\lambda)$, $\alpha(\lambda) = a\lambda + o(|\lambda|)$, $a \neq 0$, $\beta(0) = \beta_0 \neq 0$, матрица $A(0) = A$ не имеет собственных значений, кратных числам $\pm i\beta_0$. Тогда матрица $A$ неособенным преобразованием может быть сведена к матрице вида $diag(L, [colon(0, -\beta), colon(\beta, 0)])$ матрица $L$ такова, что $\det\left|Y\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - E\right| \neq 0$, $Y(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Lx$, $Y(0) = E$. Поэтому далее предполагаем, что такое преобразование выполнено.

Пусть $\omega = (\alpha, \lambda, \mu)$, $\omega = \rho\, e$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_0$ – $(n-2)$-мерный вектор, $e = (e_0, e_1, e_2, e_\lambda, e_\mu)$, $\alpha_0 = \rho\, e_0$, $\alpha_1 = \rho\, e_1$, $\alpha_2 = \rho\, e_2$, $\lambda = \rho\, e_\lambda$, $\mu = \rho\, e_\mu$.

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что система (18) имеет вид

$$P^* e + O_1(\rho) = 0,\ \psi_2^*(e) + O_2(\rho) = 0,$$

где $P^* = \left[Y\left(\frac{2\pi}{\beta_0}\right) - E, 0, 0, 0, 0\right]$, $\psi_2^*(e) = colon\left(ae_\lambda e_1 + \beta_0 e_\mu e_2, -\beta_0 e_\mu e_1 + ae_\lambda e_2\right)$.

Положим $e^* = (o_{n-2}, 1, 1, 0, 0)$, $o_{n-2}$ – нулевой $(n-2)$-мерный вектор, $\left|e^*\right| = 1$.

Значение матрицы Якоби вектор-формы $\psi_2^*(e)$ в точке $e^*$ определяется равенством $D\left(e^*\right) = [colon(a, a), colon(0, 0), colon(\beta_0, -\beta_0), colon(0, 0)]$, $rangD\left(e^*\right) = 2$.

Следовательно, $rang\, colon\left(P^*, O_{2\times(n-4)} D\left(e^*\right)\right) = n$.

Тогда согласно теореме 8 имеет место бифуркация Андронова-Хопфа системы

(1).

**Пример**. Рассмотрим систему (3), в которой
$A = \left[colon\left(0,-\sqrt{3},0,0\right),\ colon\left(\sqrt{3},0,0,0\right), colon\left(0,0,0,-2\sqrt{3}\right), colon\left(0,0,2\sqrt{3},0\right)\right]$,
$B(\lambda) = \left[colon\left(\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_4, \lambda_3\right), colon\left(0,\lambda_2, 3\lambda_2 + \lambda_3, 0\right), colon\left(0,\lambda_4,0,\lambda_2\right),\right.$
$\left.colon(\lambda_4, 0, \lambda_1, \lambda_4)\right]$, $f(x,\lambda) = colon\left(3x_1^3 + 2x_2^2\lambda_1 + 2x_3^2\lambda_2 + x_4^4,\ 2x_1x_3 + x_3^3\lambda_3 +\right.$
$\left.+ x_1^2\lambda_4 + x_2^2\lambda_3,\ x_1x_2x_3 + 4x_1x_4\lambda_2 + x_2x_3\lambda_4,\ x_4^2 + x_3x_4\lambda_2^2 + x_1^3 + x_2x_4\lambda_1^2\right)$.

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$ определяется равенством $X(t) =$
$= \left[colon\left(\cos\sqrt{3}t, -\sin\sqrt{3}t, 0, 0\right),\ colon\left(\sin\sqrt{3}t, \cos\sqrt{3}t, 0, 0\right),\ colon\left(0,0,\cos 2\sqrt{3}t,\right.\right.$
$\left.\left.-\sin 2\sqrt{3}t\right),\ colon\left(0,0,\sin 2\sqrt{3}t, \cos 2\sqrt{3}t\right)\right]$. Тогда $X^{-1}(t) = \left[colon\left(\cos\sqrt{3}t,\right.\right.$
$\left.\sin\sqrt{3}t,\ 0,\ 0\right),\ colon\left(-\sin\sqrt{3}t,\ \cos\sqrt{3}t,\ 0,\ 0\right),\ \ colon\left(0,\ 0,\ \cos 2\sqrt{3}t,\ \sin 2\sqrt{3}t\right),$
$\left.colon\left(0,0,-\sin 2\sqrt{3}t,\ \cos 2\sqrt{3}t\right)\right]$.

Собственными значениями матрицы $A$ являются числа $\pm i\sqrt{3}$, $\pm i2\sqrt{3}$. Следовательно, $s = 1$, $K_1 = 2$, $\omega_{10} = \omega_0 = 2\sqrt{3}$, $T_1 = \frac{2K_1\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Вычислением устанавливаем, что (для примера) в системе (6) $P = 0$, в системе

$$B_1(\lambda) = \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} X^{-1}(t)B(t)X(t)dt$$

(7) $L = E$, определяется равенством $B_1(\lambda) =$
$= \{\ colon[(\alpha_1 + \alpha_2)\pi,\ 2(\lambda_1 + \lambda_3)\pi,\ 0,\ 0],\ colon[\ 2(\lambda_1 + \lambda_2)\pi,\ -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi, 0, 0],$
$colon[0,\ 0,\ -\lambda_4\pi,\ (\lambda_1 + \lambda_2)\pi\ ],\ colon[0,\ 0, (\lambda_1 + \lambda_2)\pi,\ \lambda_4\pi\ ]\}$.

Очевидно, что $B_1(\lambda) = K(\lambda) = \overline{D}(\lambda)$, $\beta = \alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Матрица $Y(\alpha)$, удовлетворяющая неравенству $Y(\alpha)\lambda = B_1(\lambda)\alpha$, имеет вид $Y(\alpha) =$
$= \{\ colon\,[(\alpha_1 + 2\alpha_2)\pi,\ -\alpha_2\pi,\ \alpha_1\pi,\ \alpha_3\pi\ ],\ colon\,[\alpha_1\pi,\ 2\pi\,(\alpha_1 - \alpha_2),\ \alpha_4\pi,\ \alpha_3\pi\ ],$
$colon[2\alpha_2\pi, 2\alpha_1\pi, 0, 0],\ colon[0, 0, \alpha_3\pi, \alpha_4\pi\ ]\}$.

Пусть $\alpha = \rho\,e$, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Выберем $e^* = (0,1,0,1)$. Тогда $\left|e^*\right| = 1$, $\det Y\left(e^*\right) = 2\pi^4$. Согласно теореме 2 имеет место бифуркация рождения цикла системы, рассмотренной в качестве примера.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Андронов, А.А.* Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла / А.А. Андронов, Леонтович Е.А. // Математический сборник. – 1959. – Т. 40. Вып. 2. – С. 179–224.

2. *Андронов, А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, [и др.]. – М.: Наука, 1967.

3. *Марсден, Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980.

4. *Измаилов, А.Ф.* К теореме Андронова-Хопфа о бифуркации рождения цикла. //

Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 609–615.
5. *Усачёв, Ю.В.* Рождение периодических решений системы дифференциальных уравнений. // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2006 – № 10. – С. 67–71.
6. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

**УДК 517.948**

**М.Т. Терёхин**

## ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БАЗИСОМ

Для операторного уравнения в банаховом пространстве с базисом в предположении, что оно имеет нулевое решение при любом значении параметра, доказаны теоремы существования ненулевого решения в окрестности нулевого решения.

Пусть $X$, $\Lambda$ – банаховы пространства и пусть $F: X\times\Lambda\to X$ – оператор. Нулевой элемент в любом из этих пространств будем обозначать одним и тем же знаком $0$. Этим же знаком будем обозначать число, равное нулю.

Будем предполагать, что существует $x^*\in X$ такое, что при любом $\lambda\in\Lambda$ выполнено равенство $F(x^*,\lambda)=0$.

Ставится задача – определить условия, при которых существуют $x\in X$ и $\lambda\in\Lambda$ такие, что

$$F(x,\lambda)=0, \tag{1}$$

$$x\neq x^*. \tag{2}$$

Далее такую задачу будем называть задачей (1), (2).

Пусть $\lambda^*\in\Lambda$. Очевидно, что $F(x^*,\lambda^*)=0$. Отметим, что условия существования неявной функции, определенной равенством (1) в окрестности точки $\lambda^*$, не все значения которой совпадают с $x^*$, являются условиями разрешимости задачи (1), (2).

Проблема существования неявной функции, определенной равенством (1), рассматривается в работах [1–3]. Вопрос о существовании окрестности точки $\lambda^*$, в которой не все значения неявной функции совпадают с $x^*$, в этих работах не обсуждается. Для разрешимости задачи (1), (2) существование такой окрестности существенно, так как равенство (1) определяет неявную функцию $\varphi$, при любом $\lambda\in\Lambda$ удовлетворяющую равенству $\varphi(\lambda)=x^*$.

Для простоты записей положим $x^*=0$. Пусть существует число $\delta_0>0$ такое, что при любых $x\in X(\delta_0)=\{x\in X:\|x\|\le\delta_0\}$, $\lambda\in\Lambda(\delta_0)=\{\lambda\in\Lambda,\lambda^*\in\Lambda:$

$\|\lambda - \lambda^*\| \le \delta_0\}$, $\lambda^*$ - некоторый фиксированный элемент, выполнено равенство

$$F(x,\lambda) = A(\lambda^*)x + \overline{F}(x,\lambda,\lambda^*), \tag{3}$$

в котором $A(\lambda^*)$ – линейный оператор, для любых $\delta \in (0,\delta_0]$, $x \in X(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ $\|\overline{F}(x,\lambda,\lambda^*)\| \le \omega(\delta)\|x\|$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, $\overline{F}(0,\lambda,\lambda^*) \equiv 0$ на множестве $\Lambda(\delta_0)$.

**Теорема 1**. Если $\lambda^* \in \Lambda$ таково, что $A(\lambda^*)$ – непрерывный оператор, имеющий ограниченный в пространстве $X$ обратный оператор, то существует число $\delta \in (0,\delta_0]$, при котором задача (1), (2) неразрешима на множестве $\{(x,\lambda): x \in X(\delta), \lambda \in \Lambda(\delta)\} = X(\delta) \times \Lambda(\delta)$.

**Доказательство**. Так как $A^{-1}(\lambda^*)$ – ограниченный оператор, то существует число $m_0 > 0$ такое, что при любом $\gamma \in X$ $\|A^{-1}(\lambda^*)\gamma\| \le m_0\|\gamma\|$. Тогда для любого $x \in X$, положив $\gamma = A(\lambda^*)x$, получим $\|A(\lambda^*)x\| \ge \frac{1}{m_0}\|x\|$.

Согласно равенству (3) число $\delta \in (0,\delta_0]$ можно выбрать так, чтобы при любых $(x,\lambda) \in X(\delta) \times \Lambda(\delta)$, $x \ne 0$ выполнялось неравенство $\|\overline{F}(x,\lambda,\lambda^*)\| < \frac{\|x\|}{2m_0}$. Следовательно, при любых $(x,\lambda) \in X(\delta) \times \Lambda(\delta)$, $x \ne 0$

$$\|F(x,\lambda,\lambda^*)\| \ge \|A(\lambda^*)x\| - \|F(x,\lambda,\lambda^*)\| \ge \frac{\|x\|}{m_0} - \frac{\|x\|}{2m_0} = \frac{\|x\|}{2m_0} > 0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что необходимым условием разрешимости задачи (1), (2) в достаточно малой окрестности точки $(0,\lambda^*)$ является необратимость оператора $A(\lambda^*)$ в пространстве $X$.

Далее будем предполагать, что существует $\lambda^* \in \Lambda$ такое, что оператор $A(\lambda^*)$ в пространстве $X$ необратим. Пусть для простоты записей $\lambda^* = 0$. Тогда положим $A(\lambda^*) = A$, $\overline{F}(x,\lambda,\lambda^*) = F^*(x,\lambda)$. Будем также предполагать, что на множестве $X(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ справедливо представление

$$F^*(x,\lambda) = C(x,\lambda) + D(x,\lambda),$$

в котором операторы $C$ и $D$ такие, что

$$\begin{gathered} C(\mu x, \mu\lambda) = \mu^k C(x,\lambda), \\ \|C(x_1,\lambda) - C(x_2,\lambda)\| \le q_0\delta^{k-1}\|x_1 - x_2\|, \\ \|D(x_1,\lambda) - D(x_2,\lambda)\| \le \overline{q}\|x_1 - x_2\|, \\ \|D(x_1,\lambda) - D(x_2,\lambda)\| \le \overline{q}\|x_1 - x_2\|, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\|D(x,\lambda)\|}{\|z\|^{k-1}}=0,$$

$x_1\in X(\delta)$, $x_2\in X(\delta)$, $z=(x,\lambda)$, $\|z\|=\max\{\|x\|,\|\lambda\|\}$, $\delta\in(0,\delta_0]$, $\lim_{\delta\to 0}\frac{\bar{q}}{\delta^{k-1}}=0$, $q_0>0$ – число, $k\geq 2$ – натуральное число. Уравнение (1) запишется так:

$$F(x,\lambda)=Ax+C(x,\lambda)+D(x,\lambda)=0. \tag{5}$$

Пусть $h_1$, $h_2$, …, $h_n$ – собственные линейно независимые элементы оператора $A$, соответствующие его нулевому собственному числу, то есть при любом $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $Ah_i=0$, $h_i\in X$, $\|h_i\|=1$.

Пусть $E_0$ – линейная оболочка, определенная элементами $h_1$, $h_2$, …, $h_n$. Следовательно, $E_0=\ker A$. Пространство $X$ можно представить равенством $X=E_0\oplus E_1\oplus E_2$, в котором $E_2$ – инвариантное для оператора $A$ пространство, $E_1$ таково, что любой элемент $x\in E_1$, $x\neq 0$ удовлетворяет условию $x\notin E_0\oplus E_2$.

Далее будем предполагать, что $E_1$ – пространство с конечным базисом, образованным элементами $g_1$, $g_2$, …, $g_m$, при любом $j\in\{1,2,\dots,m\}$ $g_j\in X$, $\|g_j\|=1$. Базис пространства $E_2$ в общем случае состоит из бесконечного (счетного) множества элементов.

В пространстве $X$ определим линейные функционалы $\xi_{0i}$, $\xi_{1j}$ согласно соотношениям

$$\xi_{0i}(h_i)=\xi_{1j}(g_j)=1,\ \xi_{0i}(h_j)=\xi_{1j}(g_i)=0 \text{ при } i\neq j,$$

$$\xi_{0i}(g_j)=\xi_{1j}(h_i)=0,\ \xi_{0i}(x)=\xi_{1j}(x)=0 \text{ при любом } x\in E_2,$$

$$\|\xi_{0i}(x)\|\leq\|x\|,\ \|\xi_{1j}(x)\|\leq\|x\|,\ i\in\{1,2,\dots,n\},\ j\in\{1,2,\dots,m\}.$$

Заметим, что если в пространстве $X$ определено скалярное произведение, а базис ортонормирован (что всегда возможно сделать, пользуясь процессом ортогонализации [4. С. 88]), то функционалы $\xi_{0i}$, $\xi_{1j}$ можно определить равенствами $\xi_{0i}=(x,h_i)$, $\xi_{1j}=(x,g_j)$ $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение.

Пусть $P$ – оператор проектирования пространства $X$ на $E_2$, то есть для любого $x\in X$ $Px\in E_2$ и $Px=x$ для любого $x\in E_2$. Тогда любой элемент $x\in X$ можно представить так:

$$x=Px+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j.$$

Учитывая определение функционалов $\xi_{0i}$, $\xi_{1j}$, получим $\xi_{0i}(x)=\alpha_i$, $\xi_{1j}(x)=\beta_j$ $\xi_{0i}(x)=\alpha_i$, $\xi_{1j}(x)=\beta_j$. Следовательно,

$$x = Px + \sum_{i=1}^{n} \xi_{0i}(x) h_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_{1j}(x) g_j . \qquad (5)$$

А так как при любых $(x, \lambda) \in X(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$ $F(x, \lambda) \in X$, то

$$F(x, \lambda) = PF(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} \xi_{0i}(F(x,\lambda)) h_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_{1j}(F(x,\lambda)) g_j .$$

Таким образом, задача поиска пары $(x, \lambda) \in X(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$, удовлетворяющей равенству (1), равносильна задаче поиска пары $(x, \lambda) \in X(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$, удовлетворяющей равенствам

$$PF(x, \lambda) = 0, \qquad (6)$$

$$\xi_{0i}(F(x, \lambda)) = 0,$$
$$\xi_{1j}(F(x, \lambda)) = 0 \qquad (7)$$

при любых $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02}, \ldots, \xi_{0n})$, $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1m})$. Тогда систему (7) можно записать так

$$\xi_0(F(x, \lambda)) = 0, \qquad \xi_1(F(x, \lambda)) = 0 .$$

Заметим, что в пространстве $E_2$ выполнено равенство $PA = AP$.

Решение уравнения (1) при фиксированном $\lambda$ будем искать в виде

$$x(\alpha, \beta) = Px(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j ,$$

где при любом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, любом $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\alpha_i$, $\beta_j$ – действительные числа, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, $\|\beta\| = \sum_{j=1}^{m} |\beta_j|$.

Положим $Px(\alpha, \beta) = z$, $\Delta_1(\delta) = \{\alpha : \|\alpha\| \le \delta\}$, $\Delta_2(\delta) = \{\beta : \|\beta\| \le \delta\}$, $T(\delta) = \{z \in E_2 : \|z\| \le \delta\}$.

**Теорема 2**. Пусть оператор $A$ в пространстве $E_2$ имеет ограниченный обратный оператор. Тогда существует число $\delta \in (0, \delta_0]$ такое, что при любых $\alpha \in \Delta_1(\delta)$, $\beta \in \Delta_2(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ уравнение (6) на множестве $T(\delta)$ имеет единственное решение.

**Доказательство**. Уравнение (6) можно записать так:

$$Px(\alpha, \beta) = -A^{-1} P[C(x(\alpha, \beta), \lambda) + D(x(\alpha, \beta), \lambda)] . \qquad (8)$$

Символом $\Gamma(\alpha, \beta, \lambda)$ обозначим оператор, определенный равенством (8).

Очевидно, что для любого $z \in E_2$ $\Gamma(\alpha, \beta, \lambda) z \in E_2$. Число $\delta \in (0, \min\{1, \delta_0\})$ выберем таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\bar{q} < q_0 \delta^{k-1}$,

$3\|A^{-1}\|q_0\delta^{k-1} < 1$. Тогда для любого $z \in T(\delta)$

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)z\| \le \|A^{-1}\|\left\| C\left(z + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j\right) + D\left(z + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j\right)\right\| \le$$

$$\le 3\|A^{-1}\|q_0\delta^k < \delta, \quad \|P\| = 1.$$

Пусть $z_1, z_2 \in T(\delta)$. Из условий (4) следует, что

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)z_1 - \Gamma(\alpha,\beta,\lambda)z_2\| \le \|A^{-1}\|\left(q_0\delta^{k-1} + \overline{q}\right)\|z_1 - z_2\| \le v\,\|z_1 - z_2\|,$$

$$v = 2\|A^{-1}\|q_0\delta^{k-1}.$$

Следовательно, при любых фиксированных $\alpha \in \Delta_1(\delta)$, $\beta \in \Delta_2(\delta)$, $\lambda \in \Lambda(\delta)$ оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)$ на множестве $T(\delta)$ имеет единственную неподвижную точку. Теорема доказана.

Далее предполагается, что число $\delta > 0$ выбрано согласно доказательству теоремы 2.

**Замечание 1.** На множестве $T(\delta)$ оператор $\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $v$.

**Замечание 2.** Если $\alpha^i \in \Delta_1(\delta)$, $\beta^i \in \Delta_2(\delta)$, $i = 1, 2$, $Px(\alpha^i, \beta^i)$ – неподвижная точка оператора $\Gamma(\alpha^i, \beta^i, \lambda)$, то

$$\left\|Px(\alpha^1,\beta^1) - Px(\alpha^2,\beta^2)\right\| = \left\|\Gamma(\alpha^i,\beta^i,\lambda)Px(\alpha^1,\beta) - \Gamma(\alpha^2,\beta^2,\lambda)Px(\alpha^2,\beta^2)\right\| \le$$

$$\le v\left(\left\|Px(\alpha^1,\beta^1) - Px(\alpha^2,\beta^2)\right\| + \sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^1 - \alpha_i^2\right| + \sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j^1 - \beta_j^2\right|\right).$$

Откуда

$$\left\|Px(\alpha^1,\beta^1) - Px(\alpha^2,\beta^2)\right\| \le \frac{v}{1-v}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i^1 - \alpha_i^2\right| + \sum_{j=1}^{m}\left|\beta_j^1 - \beta_j^2\right|\right).$$

**Замечание 3.** При $z = 0$

$$\|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)0\| \le \|A^{-1}\|\left(q_0\delta^{k-1} + \overline{q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{j=1}^{m}|\beta_j|\right) \le v\left(\|\alpha\| + \|\beta\|\right),$$

поэтому

$$\|Px(\alpha,\beta)\| = \|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)Px(\alpha,\beta)\| \le$$

$$\le \|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)0\| + \|\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)Px(\alpha,\beta) - \Gamma(\alpha,\beta,\lambda)0\| \le v\left(\|\alpha\| + \|\beta\|\right) + v\,\|Px(\alpha,\beta)\|.$$

Следовательно, $\|Px(\alpha,\beta)\| \le \frac{v}{1-v}\left(\|\alpha\| + \|\beta\|\right)$.

Из теоремы 2 следует, что для того, чтобы $x(\alpha,\beta)$ было решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы векторы $\alpha$, $\beta$ и $\lambda$ удовлетворяли равенствам

$$\xi_0\left(F\left(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta),\lambda\right)\right)=0,\ \xi_1\left(F\left(Px(\alpha,\beta)+J(\alpha,\beta),\lambda\right)\right)=0,$$

где $J(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j$.

Пусть $M_0\beta=\xi_0\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j Ag_j\right)$, $M_1\beta=\xi_1\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j Ag_j\right)$,

$$G_0(\alpha,\beta,\lambda)=\xi_0\left(C\left(J(\alpha,\beta),\lambda\right)\right),\ G_1(\alpha,\beta,\lambda)=\xi_1\left(C\left(J(\alpha,\beta),\lambda\right)\right),$$

$$R_0(\alpha,\beta,\lambda)=\xi_0\left[C\left(x(\alpha,\beta),\lambda\right)-C\left(J(\alpha,\beta),\lambda\right)+D\left(x(\alpha,\beta),\lambda\right)\right],$$

$$R_1(\alpha,\beta,\lambda)=\xi_1\left[C\left(x(\alpha,\beta),\lambda\right)-C\left(J(\alpha,\beta),\lambda\right)+D\left(x(\alpha,\beta),\lambda\right)\right],$$

$$M=colon(M_0,M_1),\ G(\alpha,\beta,\lambda)=colon\left(G_0(\alpha,\beta,\lambda),\ G_1(\alpha,\beta,\lambda)\right),$$

$$R(\alpha,\beta,\lambda)=colon\left(R_0(\alpha,\beta,\lambda),\ R_1(\alpha,\beta,\lambda)\right).$$

Тогда система (7) может быть записана так

$$M\beta+G(\alpha,\beta,\lambda)+R(\alpha,\beta,\lambda)=0, \tag{9}$$

где $M$ – $(n+m)\times m$-матрица. Можно убедиться, что $G(t\alpha,t\beta,t\lambda)=t^k G(\alpha,\beta,\lambda)$, $R(\alpha,\beta,\lambda)=o\left(\|y\|^k\right)$, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{o\left(\|y\|^k\right)}{\|y\|^k}=0$, $y=colon(\alpha,\beta,\lambda)$, $\|y\|=\max\left(\|\alpha\|,\|\beta\|,\|\lambda\|\right)$.

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 3**. Если система (9) имеет решение $(\alpha,\beta,\lambda)$, $\|\alpha\|+\|\beta\|\neq 0$, то задача (1), (2) разрешима.

Условия разрешимости систем уравнений вида (9) рассмотрены в работах [5, 6].

Отметим, что в предположении, что оператор $A$ имеет единственный собственный элемент, $X=E_0\oplus E_2$, $E_0=\ker A$, $E_2$ – инвариантное пространство для оператора $A$, решение задачи (1), (2), рассматривалось в работе [7].

**Пример**. Рассмотрим операторное уравнение

$$F(x,\lambda)=Ax+f(x,\lambda)=0, \tag{10}$$

в котором матрица $A$ и вектор-функция $f(x,\lambda)$ определяются равенствами

$$A=\left[colon(0,0,0,0),colon(1,0,0,0),colon(0,0,2,1),colon(0,0,1,3)\right],$$

$$f(x,\lambda)=C(x,\lambda)+D(x,\lambda),$$

$C(x,\lambda)=colon\left(2x_1^2+4x_1\lambda+5x_3^2+7x_4^2,\ x_1^2-x_2^2+6x_3^2+7x_1x_3,\ 3x_1^2-7x_2^2+x_1x_4,\right.$ $\left.x_1^2+x_2^2+3x_3^2+5x_1x_3\right)$, $D(x,\lambda)=colon\left(6x_1^3\lambda+4x_1^2\lambda^2+x_3^5,0,0,0\right)$, $x=colon(x_1,$ $x_2,x_3,x_4)\in X_4$, $X_4$ – четырехмерное векторное пространство, $\lambda$ – скалярный параметр, $k=2$.

Можно убедиться, что для системы (10) выполнено соотношение (3) при $\lambda^*=0$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\ker A=E_0$ – линейная оболочка, определенная вектором $h = colon(1, 0, 0, 0)$, $E_2$ – инвариантное для матрицы $A$ пространство – линейная оболочка, определенная векторами $colon(0, 0, 1, 0)$, $colon(0, 0, 0, 1)$, пространство $E_1$ – линейная оболочка, определенная вектором $g = colon(0, 1, 0, 0)$. Тогда любой элемент $x \in X_4$ можно представить равенством

$$x = Px + \alpha h + \beta g, \tag{11}$$

$P$ – оператор проектирования пространства $X_4$ на $E_2$, $\alpha$, $\beta$ – действительные числа.

В пространстве $E_2$ матрицей, обратной для матрицы $A$, является матрица $A^{-1} = \left[colon(0, 0, 0, 0), colon(0, 0, 0, 0), colon\left(0, 0, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right), colon\left(0, 0, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right]$.

Следовательно, в пространстве $E_2$ оператор $A^{-1}$ ограничен.

Решение системы (10) будет искать в виде, определенном формулой (11). Функционалы $\xi_0$, $\xi_1$ определим согласно равенствам $\xi_0(x) = (x, h)$, $\xi_1(x) = (x, g)$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение. Следовательно, $x = Px + \xi_0(x)h + \xi_1(x)g$. А так как при любых $x \in X_4$ и $\lambda$ $F(x, \lambda) \in X_4$, то

$$F(x, \lambda) = PF(x, \lambda) + \xi_0(F(x, \lambda))h + \xi_1(F(x, \lambda))g.$$

Поэтому равенство $F(x, \lambda) = 0$ равносильно равенствам

$$PF(x, \lambda) = 0, \ \xi_0(F(x, \lambda)) = 0, \ \xi_1(F(x, \lambda)) = 0.$$

На основании теоремы 2 существует число $\delta \in (0, 1)$ такое, что при любых фиксированных $\alpha$ ($\|\alpha\| \le \delta$), $\lambda$ ($\|\lambda\| \le \delta$) уравнение $PF(x, \lambda) = PF(z + \alpha h + \beta g, \lambda) = \ = 0$ имеет единственное решение $z$ ($\|z\| \le \delta$) (здесь $z = Px$).

Система равенств $\xi_0(F(x, \lambda)) = 0$, $\xi_1(F(x, \lambda)) = 0$ запишется так:

$$\begin{aligned} &\beta + 2\alpha^2 + 4\alpha\lambda + \overline{\overline{o}}\left(\|y\|^2\right) = 0, \\ &3\beta^2 + \alpha\lambda + \overline{\overline{o}}\left(\|y\|^2\right) = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$y = colon(\alpha, \beta, \lambda)$, $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{o\left(\|y\|^2\right)}{\|y\|^2} = 0$.

Заметим, что при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\lambda = 0$, $3\beta^2 + \alpha\lambda = 0$. Тогда, полагая $\alpha = \rho u_1$, $\beta = \rho u_2$, $\lambda = \rho u_3$, $\rho > 0$, $u = colon(u_1, u_2, u_3)$ ($y = \rho u$), $u^* = colon(1, 0, 0)$, $v = u - u^* = colon(v_1, v_2, v_3)$, $v_1 = u_1 - 1$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_3$ и разлагая функцию $3u_2^2 + u_1 u_3$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 0, 0)$, систему (12) запишем так:

$$Bv + P_2(v) + O\left(\rho\, \|u^* + v\|^2\right) = 0, \tag{13}$$

где $B = [colon(0,0),\ colon(1,0),\ colon(0,1)]$, $P_2(v) = colon\left(0,\ 3v_2^2 + 2v_1 v_3\right)$, $O\left(\rho \|u^* + v\|^2\right) = colon\left(o\left(\rho \|u^* + v\|^2\right),\ O\left(\rho \|u^* + v\|^2\right)\right)$.

Так как $rangB = 2$, то по теореме 6 [6] существуют числа $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \in (0,1)$ такие, что при любых фиксированных $v_1$ ($|v_1| < \sigma_2$), $\rho \in (0, \sigma_2)$ существует вектор $colon(v_2, v_3)$, $|v_2| < \sigma_1$, $|v_3| < \sigma_1$, удовлетворяющий системе (13).

Пусть $\rho^* \in (0, \sigma_2)$, $v_1^*$ ($|v_1^*| < \sigma_2$), $v_2^*$ ($|v_2^*| < \sigma_1$), $v_3^*$ ($|v_3^*| < \sigma_1$), $v^* = colon(v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ таковы, что $Bv^* + P_2(v^*) + O\left(\rho^* \|u^* + v^*\|^2\right) = 0$. Тогда $\alpha^* = \rho^*(1 + v_1^*) \neq 0$, $\beta^* = \rho^* v_2^*$, $\lambda^* = \rho^* v_3^*$, и следовательно, на основании теоремы 2 существует $z^*$, удовлетворяющее равенству $PF\,(z^* + \alpha^* h + \beta^* g,$ $\lambda^*) = 0$. А это значит, что задача (1), (2) для уравнения (10) разрешима, то есть $F(x^*, \lambda^*) = 0$, $x^* = z^* + \alpha^* h + \beta^* g$, $x^* \neq 0$, так как $\alpha^* \neq 0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Аваков, Е.Р.* Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Математические заметки. – 1990. – Т. 47. – Вып. 5. – С. 3-13.
2. *Арутюнов, А.В.* Теорема о неявной функции и аномальные точки // Доклады РАН. – 1999. - Т. 368. № 8. - С. 586-589.
3. *Измайлов, А.Ф.* Теоремы о представлении семейства нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Математические заметки. – 2000. - Т. 67. Вып. 1. - С. 57-68.
4. *Люстерник, Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - М.: Наука, 1965.
5. *Терехин, М.Т.* Ненулевые периодические решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенной матрицей при производных // Дифференциальные уравнения. - 2003. - Т. 39. № 12. - С. 1645-1653.
6. *Терехин, М.Т.* Об условиях разрешимости операторных уравнений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. - 2005. - № 10. - С. 56 - 66.
7. *Красносельский, М.А.* Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517. 938**



**Н.М. Турусикова**


## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Описан способ построения оптимального управления линейной системы дифференциальных уравнений в случае линейной зависимости строк импульсной переходной матрицы. Рассмотрен конкретный пример нахождения такого управления для системы второго порядка.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(t), \tag{1}$$

в которой $x \in R^n, u \in R^m$ – вектор-управление, $A(t), B(t)$ – непрерывные на сегменте $[0, T]$ матрицы, $F(t)$ – $n$-мерная непрерывная на $[0, T]$ вектор-функция, $T$ – некоторое положительное число.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные на сегменте $[0, T]$ вектор-функции $u(t)$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U$.

Ставится задача – среди допустимых управлений найти управление, переводящее объект $x(t)$ из начального состояния $x(0) = \alpha$ в конечное $x(T) = \beta$ и имеющее наименьшую норму. Такое управление назовем оптимальным. Под нормой вектор-функции $u(t)$ будем понимать норму, определенную выражением

$$\|u(t)\| = \left[\int_0^T u^2(t)dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^T \sum_{i=1}^m u_i^2(t)dt\right]^{1/2}.$$

Решение системы (1) определяется равенством

$$x_i(t) = x^{(i)}(t,0)\alpha_i + \int_0^t x^{(i)}(t,\tau)F(\tau)d\tau + \int_0^t h^{(i)}(t,\tau)u(\tau)d\tau,\ i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $x^{(i)}(t,\tau) = \left\{x_{ij}(t,\tau),\ j = \overline{1,n}\right\}$ – $i$-я строка матрицы $X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$, $E$ – единичная матрица, $h^{(i)}(t,\tau) = \left\{h_{ij}(t,\tau),\ j = \overline{1,m}\right\}$ – $i$-я строка импульсной переходной матрицы $H(t,\tau) = X(t,\tau)B(\tau), u(\cdot) \in U$.

Полагая $t = T$ в равенстве (2), получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^T h^{(i)}(T,\tau)u(\tau)\,d\tau = c_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где вектор $c = colon(c_1, c_2, ..., c_n)$ определяется выражением

$$c_i = x_i(T) - x^{(i)}(T,0)\alpha_i - \int_0^T x^{(i)}(T,\tau)F(\tau)d\tau.$$

Обозначим $\bar{h}^{(i)}(\tau) = h^{(i)}(T,\tau)$, $i = \overline{1,n}$.

Предположим, что вектор-функции $\overline{h}^{(i)}(\tau)$ линейно зависимы на сегменте $[0, T]$, то есть существует такой набор чисел $\gamma_1, \gamma_2, ... \gamma_n$, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \neq 0$, что при любом значении $t \in [0, T]$ выполняется $\gamma_1 \overline{h}^{(1)}(t) + \gamma_2 \overline{h}^{(2)}(t) + ... + \gamma_n \overline{h}^{(n)}(t) = 0$.

Будем искать управление, удовлетворяющее системе (3), в виде линейной комбинации вектор-строк импульсной переходной матрицы [1]

$$u(t) = l_1 \overline{h}^{(1)}(t) + l_2 \overline{h}^{(2)}(t) + ... + l_n \overline{h}^{(n)}(t), \tag{4}$$

где $l_i, i = \overline{1,n}$, – некоторые действительные числа.

Подставив выражение (4) для $u(t)$ в систему (3) и выполнив интегрирование, получим алгебраическую систему линейных уравнений для нахождения величин $l_i, i = \overline{1,n}$,

$$\begin{cases} \lambda_{11} l_1 + \lambda_{12} l_2 + ... + \lambda_{1n} l_n = c_1, \\ ...... \\ \lambda_{n1} l_1 + \lambda_{n2} l_2 + ... + \lambda_{nn} l_n = c_n, \end{cases} \tag{5}$$

в которой коэффициенты $\lambda_{ij} = \int_0^T \overline{h}^{(i)}(t) \overline{h}^{(j)}(t) dt, i, j = \overline{1,n}$.

Заметим, что если все числа $c_i, i = \overline{1,n}$, равны нулю, то задача решается сразу и решением является $u(t) \equiv 0$. Поэтому будем считать, что $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$.

Убедимся, что ранг основной матрицы $\{\lambda_{ij}\}_1^n$ системы (5) не может равняться нулю. В самом деле, пусть $rang\{\lambda_{ij}\} = 0$. Тогда при любых $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ $\lambda_{ij} = 0$. Следовательно, система (5) будет иметь решение только при нулевом векторе *c*, что противоречит соотношению $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$.

Рассмотрим интеграл $\int_0^T u^2(t) dt = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} l_i l_j$. Поскольку вектор-функции $\overline{h}^{(i)}(t)$ линейно зависимы на сегменте $[0, T]$, то квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} l_i l_j$ не является положительно определенной. Тогда

$$\Delta\{\lambda_{ij}\} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть $rang\{\lambda_{ij}\} = r, \quad 0 < r < n$. Предположим, что линейно независимыми строками являются первые $r$ строк системы (5), то есть минор порядка $r$ матрицы $\{\lambda_{ij}\}_1^n$ находится в левом верхнем углу. С помощью элементарных преобразований приведем систему (5) к виду

$$\begin{gathered} \lambda_{11}l_1 + \dots + \lambda_{1r}l_r + \dots + \lambda_{1n}l_n = c_1, \\ \dots\dots \\ \lambda_{r1}l_1 + \dots + \lambda_{rr}l_r + \dots + \lambda_{rn}l_n = c_r, \\ 0 = c'_{r+1}, \\ \dots\dots \\ 0 = c'_n. \end{gathered} \tag{6}$$

Условием совместности системы (6) является выполнение равенств $c'_{r+1} = c'_{r+2} = \dots = c'_n = 0$. При любом $j \in \{r+1, \dots, n\}$ $c'_j$ определяется выражением $c'_j = c_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k^j c_k$, где $\gamma_k^j$ – числа, полученные в результате элементарных преобразований. Таким образом, для разрешимости системы (6) и, следовательно, системы (5), необходимо и достаточно выполнение равенств

$$c_j = -\sum_{k=1}^{r} \gamma_k^j c_k, \ j = \overline{r+1, n}. \tag{7}$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются равенства (7). Тогда:

1) существует управление $u^0(t)$, разрешающее систему (3),
2) любое решение $u(t)$ системы (3) удовлетворяет неравенству $\|u(t)\| \geq \|u^0(t)\|$

**Доказательство**. Пусть выполняется условие теоремы. Решением системы (6) является вектор $l = colon(l_1, l_2, \dots, l_n)$, координаты которого удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered} l_1 = d_1 + k_{r+1}^1 l_{r+1} + k_{r+2}^1 l_{r+2} + \dots + k_n^1 l_n, \\ \dots\dots \\ l_r = d_r + k_{r+1}^r l_{r+1} + k_{r+2}^r l_{r+2} + \dots + k_n^r l_n, \end{gathered}$$

где $d_i, k_j^i, i = \overline{1, r}, j = \overline{r+1, n}$, – известные действительные числа, $l_{r+1}, l_{r+2}, \dots, l_n$ – свободные переменные. Тогда управление $u^0(t)$, удовлетворяющее системе (3), определится равенством

$$u^0(t)=\sum_{i=r+1}^{n} k_i^1 l_i \overline{h}^{(1)}(t)+\sum_{i=r+1}^{n} k_i^2 l_i \overline{h}^{(2)}(t)+\ldots+$$

$$+\sum_{i=r+1}^{n} k_i^r l_i \overline{h}^{(r)}(t)+l_{r+1}\overline{h}^{(r+1)}(t)+\ldots+l_n\overline{h}^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{r} d_i\overline{h}^{(i)}(t)$$

или

$$u^0(t)=l_{r+1}\left[\sum_{i=1}^{r} k_{r+1}^i\overline{h}^{(i)}(t)+\overline{h}^{(r+1)}(t)\right]+\ldots+l_n\left[\sum_{i=1}^{r} k_n^i l_i\overline{h}^{(i)}(t)+\overline{h}^{(n)}(t)\right]+\sum_{i=1}^{r} d_i\overline{h}^{(i)}(t).$$

Пусть $d=colon(d_1,d_2,...,d_r,\underbrace{0,...,0}_{n-r})$,

$$K=\begin{pmatrix} k_{r+1}^1 & k_{r+1}^2 & \ldots & k_{r+1}^r & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{r+2}^1 & k_{r+2}^2 & \ldots & k_{r+2}^r & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_n^1 & k_n^2 & \ldots & k_n^r & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

(последние $n-r$ столбцов объединены фигурной скобкой с подписью $n-r$).

Управление $u^0(t)$ примет вид

$$u^0(t)=\left(\bar{l}'K+d'\right)\overline{H}(t), \tag{8}$$

где $\overline{H}(t)=colon(\overline{h}^{(1)}(t),\overline{h}^{(2)}(t),...,\overline{h}^{(n)}(t))$, $\bar{l}=colon(l_{r+1},l_{r+2},...,l_n)$, $d',\bar{l}'$ – вектор-строки. Таким образом, мы установили существование управления, удовлетворяющего системе (3).

Пусть $U^*=\left\{u^0(t):u^0(t)=\left(\bar{l}'K+d'\right)\overline{H}(t),\bar{l}'=\left(l_{r+1}\ l_{r+2}\ \ldots\ l_n\right)\right\}$ и пусть $u(t)\notin U^*$ – некоторое решение системы (3). Убедимся, что $\|u(t)\|\geq\|u^0(t)\|$ при $u^0(t)\in U^*$.

Для этого рассмотрим разность $\varphi(t)=u(t)-u^0(t)$. Докажем, что вектор-функция $\varphi(t)$ ортогональна управлению $u^0(t)$. Так как $u(t)$ и $u^0(t)$ удовлетворяют системе (3), то справедливы равенства

$$\int_0^T \overline{h}^{(i)}(t)\left[u(t)-u^0(t)\right]dt=\int_0^T \overline{h}^{(i)}(t)\varphi(t)dt=0,\ i=\overline{1,n},$$

или в векторной форме $\int_0^T \overline{H}(t)\varphi(t)\,dt=0$.

Отсюда

$$\int_0^T u^0(t)\varphi(t)dt=\int_0^T\left(\bar{l}'K+d'\right)\overline{H}(t)\varphi(t)dt=\int_0^T \bar{l}'K\overline{H}(t)\varphi(t)dt+\int_0^T d'\overline{H}(t)\varphi(t)dt=0,$$

что и доказывает ортогональность функций $\varphi(t)$, $u^0(t)$.

С другой стороны, убедимся, что всякая вектор-функция $u(t) = u^0(t) + \varphi(t)$, где $u^0(t) \in U^*$, $\varphi(t)$ – произвольная вектор-функция, ортогональная к $\bar{h}^{(i)}(t)$, $i \in \{1,2,...,n\}$ является управлением, удовлетворяющим системе (3). Действительно, имеем $\int_0^T \bar{h}^{(i)}(t)\varphi(t)dt = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, и $u^0(t)$ – решение системы (3), следовательно, $\int_0^T \bar{h}^{(i)}(t)u(t)dt = \int_0^T \bar{h}^{(i)}(t)\left[u^0(t) + \varphi(t)\right]dt = c_i,\ i = \overline{1,n}$,. Таким образом, $u(t) = u^0(t) + \varphi(t)$ – решение системы (3). Кроме того, $\int_0^T \left(\bar{l}'K + d'\right)\overline{H}(t)\varphi(t)dt = = \int_0^T u^0(t)\varphi(t)dt = 0$, то есть вектор-функции $\varphi(t)$ и $u^0(t)$ ортогональны.

Рассмотрим квадрат нормы решения $u(t) \notin U^*$. Имеем

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^T u^2(t)dt = \int_0^T \left[u^0(t) + \varphi(t)\right]^2 dt = \int_0^T \left(u^0(t)\right)^2 dt + 2\int_0^T u^0(t)\varphi(t)dt + \int_0^T \varphi^2(t)dt.$$

Третье слагаемое неотрицательно, второе слагаемое есть нуль, поскольку вектор-функции $\varphi(t)$, $u^0(t)$ ортогональны. Следовательно, $\|u(t)\|^2 \ge \left\|u^0(t)\right\|^2$, откуда $\|u(t)\| \ge \left\|u^0(t)\right\|, u^0(t) \in U^*$. Заметим, что если $u(t) \ne u^0(t)$, то $\int_0^T \varphi^2(t)dt > 0$ и третье слагаемое положительно, вследствие чего $\|u(t)\| > \left\|u^0(t)\right\|$. Теорема доказана.

**Теорема 2**. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда управление $\bar{u}^0(t) = d'\overline{H}(t)$ удовлетворяет неравенству $\|u(t)\| \ge \left\|\bar{u}^0(t)\right\|, u^0(t) \in U^*$, и следовательно, является минимальным по норме среди всех управлений, разрешающих систему (3).

**Доказательство**. Имеем $u^0(t) = \bar{u}^0(t) + \bar{l}'K\overline{H}(t)$. Обозначим $\psi(t) = u^0(t) - \bar{u}^0(t)$. Убедимся, что вектор-функции $\psi(t)$ и $\bar{u}^0(t)$ ортогональны.

Найдем $\int_0^T \bar{h}^{(i)}(t)\psi(t)dt = \int_0^T \bar{h}^{(i)}(t)\left[u^0(t) - \bar{u}^0(t)\right]dt = 0.$ Откуда $\int_0^T \bar{u}^0(t)\psi(t)dt = = \int_0^T d'\overline{H}(t)\psi(t)dt = 0$, что и доказывает ортогональность $\psi(t)$ и $\bar{u}^0(t)$.

Рассмотрим квадрат нормы управления $u^0(t) \in U^*$:

$$\left\| u^0(t) \right\|^2 = \int_0^T \left( u^0(t) \right)^2 dt = \int_0^T \left[ \bar{u}^0(t) + \psi(t) \right]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left( \bar{u}^0(t) \right)^2 dt + 2\int_0^T \bar{u}^0(t)\psi(t)dt + \int_0^T \psi^2(t)dt .$$

В силу ортогональности вектор-функций $\psi(t)$ и $\bar{u}^0(t)$ второе слагаемое есть нуль, третье слагаемое неотрицательно, следовательно, получили неравенство $\left\| \bar{u}^0(t) \right\| \le \left\| u(t) \right\|$. Теорема доказана.

**Пример.** Рассмотрим систему второго порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u + 6, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u + 6. \end{cases}$$

Задача: найти оптимальное управление, переводящее объект, описываемый данной системой, из начального положения $x(0) = \left( x_1(0),\ x_2(0) \right) = (0, 0)$ в конечное $x(10) = (-6, -6)$.

Решение. Фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы уравнений $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $X(0) = E$. Импульсная переходная матрица $H(10, t) = colon\left( e^{10-t}, e^{10-t} \right)$ имеет линейно зависимые строки на всей числовой оси, в частности на сегменте $[0; 10]$.

Уравнения (3) примут вид $\int_0^{10} e^{10-t} u(t)dt = -6e^{10}, \int_0^{10} e^{10-t} u(t)dt = -6e^{10}$, при этом вектор $c = (-6e^{10}, -6e^{10})$. Используя представление (4), будем иметь $u^0(t) = l_1 e^{10-t} + l_2 e^{10-t} = le^{10-t}, l = l_1 + l_2$, – некоторое действительное число. Система линейных уравнений для определения коэффициентов определится равенствами

$$\begin{cases} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{20} \right) l_1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{20} \right) l_2 = -6e^{10}, \\ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{20} \right) l_1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{20} \right) l_2 = -6e^{10}. \end{cases}$$

Иначе эта система относительно неизвестного коэффициента $l$ запишется так:

$$\left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{20} \right) l = -6e^{10} .$$

Откуда $l = -12e^{10}\left( e^{20} - 1 \right)^{-1}$.

Итак, решением поставленной задачи является функция

$$u^0(t) = -12e^{10}\left(e^{20}-1\right)^{-1} e^{10-t} = -12\left(e^{20}-1\right)^{-1} e^{20-t}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. – М.: Наука, 1968.

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*

**УДК 51:33**

**А.В. Щербакова**

# ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТА*

Рассматривается опыт использования рейтинговых технологий при изучении математики студентами экономических специальностей.

Из системы целей, регламентирующих процесс изучения математики студентами экономических специальностей технического вуза, необходимо выделить блок, направленный на формирование готовности обучающихся к овладению будущей профессией и успешному осуществлению профессиональной деятельности. В настоящее время в подготовке конкурентоспособного специалиста усиливается акцент на развитие базовых способностей личности, позволяющих будущему специалисту «самостоятельно принимать ответственные решения в ситуации выбора, прогнозируя их возможные последствия, отличаться мобильностью в новых ситуациях, сотрудничать и координировать свою деятельность» [1].

Организация учебного процесса в вузе, отвечающая подготовке специалиста в контексте существующих реальностей, предусматривает создание условий, обеспечивающих профессионально-личностное развитие и саморазвитие каждого студента. Одним из таких условий является использование рейтинговых технологий, позволяющих задействовать весь мотивационный блок и различные способы приема-передачи учебной информации, воздействующей на студентов.

Внедрение рейтинговых технологий в процесс изучения математики студентами первого курса экономических специальностей позволяет не только обеспечить первокурснику адаптацию к системе обучения в вузе, но и создать условия для развития личности каждого студента, (посредством развития потребностей в активном самостоятельном получении знаний, овладении различными видами учебной деятельности; а так же обеспечивая возможность реализации своих способностей через вариативность содержания учебного материала и использования системы разнообразных заданий для самостоятельной работы).

С этой целью учебный материал разбит на 16 дидактических единиц (по 8 в каждом семестре), для каждой сформулированы конкретные цели и определены ключевые понятия. В течение семестра осуществляется контроль по 7 дидактическим единицам. Для этого разработана система промежуточного (тематического) контроля по различным видам учебной деятельности (тесты, самостоятельная работа, контрольная работа). Обозначены объем и уровни сложности каждого этапа контроля. Определены баллы, проставляемые по каждому виду учебной деятельности, и указана шкала перевода рейтингового балла в традиционную систему оценок.

---

* Материалы Всероссийской конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения И.П. Макарова (1906–1984) и 55-летию создания кафедры математического анализа Рязанского государственного университета. – Рязань, 2006.

Оговорено максимальное количество баллов, которое студент может набрать за семестр, и минимальное, при котором студент может быть допущен к экзамену.

На экзамен выносится учебный материал тех дидактических единиц, которые не попали в промежуточный контроль в течение семестра, а также материал, предлагавшийся для самостоятельного изучения. Специальными баллами экзамен не оценивается, итоговая оценка определяется по сумме баллов, набранных в течение семестра. Для подтверждения оценки «удовлетворительно» студенту необходимо выполнить экзаменационное задание, подтверждающее усвоение обязательного минимума. Для студентов, набравших баллы, соответствующие оценкам «хорошо» и «отлично», предлагаются задачи, позволяющие проверить умения применять математический аппарат для решения задач с экономическим содержанием.

Если студент желает получить оценку выше, чем та, которая определяется суммой баллов по итогам семестра, то он может сдавать экзамен по учебному материалу, изученному в течение всего семестра и получить желаемую оценку.

Каждый промежуточный контроль предусматривает дополнительные задания, содержащие вопросы, предложенные на самостоятельное изучение, и задачи повышенной сложности. Эти дополнительные задания также оцениваются в баллах; и если благодаря ним суммарное количество баллов за семестр на 25–30% превышает максимальное, то студент освобождается от экзамена и автоматически получает оценку «отлично». Поскольку, как показывает практика использования такого подхода в процессе изучения математики, студенты в полной мере усваивают весь учебный материал за счет постоянной систематической работы в течение всего курса обучения.

Сравнение качества знаний в первом и во втором семестрах показало, что результаты второго семестра лучше, несмотря на возросший уровень сложности учебного материала. Положительная тенденция рейтинга по семестрам – это один из признаков конкурентоспособности будущего специалиста.

На наш взгляд это обеспечивается не только способом подачи учебного материала, но и системой требований и критериев выставления баллов (и последующего перевода их в традиционные оценки). Основная цель, которую преследует преподаватель, оценивая студента, – это сравнение его успехов только с его же собственными, констатируется личный вклад студента, его личное участие в усвоении каждой дидактической единицы; то есть оценивается не только уровень усвоения знаний и сформированности навыков, но и затраченный на них труд. Таким образом, процесс обучения направлен на совершенствование умений по организации умственного труда студентов, овладение различными видами учебной деятельности и планирование их; что, в целом создает условия для развития личности каждого студента.

Таким образом, организация учебного процесса в режиме рейтинговых технологий позволяет реализовать личностно ориентированный подход при изучении дисциплины «Математика», в процессе которого развиваются умения адаптироваться к изменяющимся условиям жизни, активно влиять на эти условия для достижения успеха; формируется «критериальная основа», необходимая для самостоятельного поиска и принятия решения в проблемных ситуациях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Программа педагогического образования России // Педагогическое образование и наука. – 2000. – №1. – С.14.



*Тамбовский государственный технический университет*


**УДК 517.938**


**М.В. Юханова**


## ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ВИДЕ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ


В данной статье приведены достаточные условия локальной управляемости нелинейной системы дифференциальных уравнений в случае, когда допустимые управления отыскиваются в виде вектор-функции, зависящей от фазовой переменной.


Пусть система имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $A(t)$, $B(t)$ – измеримые ограниченные матрицы, $m \le n$, $t \in [0,T]$, $f(t,x,u)$ – $n$-мерная вектор-функция.

Управление $u(t)$ будем искать в виде вектор-функции, зависящей от фазовой переменной

$$u(t) = \varphi(t,x,c) = S(t)x + R(t)c + \tilde{\varphi}(t,x,c), \tag{*}$$

где $S(t), R(t)$ – известные $m \times n$ измеримые матрицы, ограниченные на сегменте $[0,T]$, $c$ – неизвестный вектор. Множеством допустимых управлений считаем множество $U(\delta_0) = \{u(t) : u(t) = S(t)x + R(t)c + \tilde{\varphi}(t,x,c), x(t) \in D(\delta_0), c \in C(\delta_0)\}$ [1], функция $\tilde{\varphi}(t,x,c)$ является известной $m$-мерной вектор-функцией.

С учетом представления $u(t)$ в виде $(*)$ систему (1) можно представить в виде

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x + N(t)c + \tilde{f}(t,x,c), \tag{2}$$

где $\tilde{A}(t) = A(t) + B(t)S(t)$, $N(t) = B(t)R(t)$ известные $n \times n$-матрицы, измеримые и ограниченные на $[0,T]$, $\tilde{f}(t,x,c) = B(t)\tilde{\varphi}(t,x,c) + f(t,x,\varphi(t,x,c))$ – известная $n$-мерная вектор-функция.

Будем предполагать, что вектор-функция $\widetilde{f}(t,x,c)$ на множестве $H(\delta_0)=$ $=\{(t,x,c):\ t\in[0,T], x\in R^n, c\in R^n, |x|\le\delta_0, |c|\le\delta_0\}$ удовлетворяет условиям Каратеодори и следующим условиям:

$1_1$) $\widetilde{f}(t,0,0)\equiv 0$ при любом $t\in[0,T]$;

$2_1$) для любого $\delta\in(0,\delta_1]$, при любых $t\in[0,T]$, $|x_1|\le\delta$, $|x_2|\le\delta$, $|c_1|\le\delta$, $|c_2|\le\delta$ имеет место неравенство

$$\left|\widetilde{f}(t,x_1,c_1)-\widetilde{f}(t,x_2,c_2)\right|\le L_1''(\delta)|c_1-c_2|+L_2''(\delta)|x_1-x_2|,$$

$L_1''(\delta)\to 0, L_2''(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$;

$3_1$) $\dfrac{\widetilde{f}(t,x,c)}{|\overline{\omega}|}\to 0$ при $|\overline{\omega}|\to 0$ равномерно по $t$, где $\overline{\omega}=(x,c)$.

Требуется определить условия, при которых система (2), а следовательно, и система (1) локально управляема.

Заметим, что если вектор-функция $t\to x(t)$ непрерывна на множестве $[0,T]$, то $u(t)=S(t)x(t)+R(t)c+\widetilde{\varphi}(t,x(t),c)$ – измеримая на сегменте $[0,T]$ вектор-функция [2].

На множестве $D(k)$ [1] определим оператор $F$ следующим равенством $F_c x=$ $\alpha+\int\limits_0^t\left(\widetilde{A}(s)x+N(s)c+\widetilde{f}(s,x,c)\right)ds$.

Пусть $\overline{x}(t)\in D(k)$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{x}(t)=\alpha+\int\limits_0^t\left(\widetilde{A}(s)\overline{x}(s)+N(s)c+\widetilde{f}(s,\overline{x}(s),c)\right)ds.$$

Следовательно, $\widetilde{x}=F_c\overline{x}$. Убедимся, что число $k$ можно выбрать так, чтобы для любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in D(k)$ выполнялось $\widetilde{x}(t)\in D(k)$.

**Лемма 1.** Пусть выполнено условие $2_1$), и $1-\left\|\widetilde{A}(.)\right\|T>0$. Тогда:

1) существует положительное число $k$, что для произвольной вектор-функции $\overline{x}(t)\in D(k)$ справедливо неравенство $|\widetilde{x}(t)|<k$;

2) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\widetilde{\delta}>0$ такое, что для любого $h\in[0,T]$, любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in D(k)$ имеет место неравенство $\int\limits_0^T|\widetilde{x}(t+h)-\widetilde{x}(t)|dt<\varepsilon$ как только $|h|<\widetilde{\delta}$.

**Доказательство.** 1. Число $\delta^*\in(0,\delta_0]$ выберем так, чтобы выполнялось соотношение $\dfrac{\delta^*}{1-\|\widetilde{A}(.)\|\cdot T}\le \delta_1$. Пусть $k_0=\dfrac{\delta^*}{1-\|\widetilde{A}(.)\|\cdot T}$. Оценим

$$|\widetilde{x}(t)|=\left|\alpha+\int_0^t\left(\widetilde{A}(s)\overline{x}(s)+N(s)c+\widetilde{f}(s,\overline{x}(s),c)\right)ds\right|\le$$

$$\le|\alpha|+\|\widetilde{A}(.)\|kT+\|N(.)\|\cdot|c|\cdot T+L_1''(\delta)\cdot|c|\cdot T+L_2''(\delta)\cdot|\overline{x}(t)|T.$$

Для любого $\delta^*$ число $\delta_2\in(0,\delta_0]$ выберем так, чтобы при любом $\delta_2\in(0,\delta_1]$ $a=\delta+\|N(.)\|\delta T+L_1''(\delta)\delta T+L_2''(\delta)\cdot kT<\delta^*$.Отсюда $k>k\|\widetilde{A}(.)\|T+\delta+\|N(.)\|\delta T+$ $+L_1''(\delta)\delta T+L_2''(\delta)\cdot kT$ для любого $\dfrac{a}{1-\|A(.)\|T}<k\le k_0$.

Следовательно, $|\widetilde{x}(t)|<k$ при любом $\delta_2\in(0,\delta_0]$.

2. Лемма будет доказана, если будет установлено, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\widetilde{\delta}>0$ такое, что для любого $h\in[0,T]$, любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in D(k)$ будет выполнено неравенство $\int_0^T|\widetilde{x}(t+h)-\widetilde{x}(t)|dt<\varepsilon$ как только $|h|<\widetilde{\delta}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Оценим

$$\int_0^T|\widetilde{x}(t+h)-\widetilde{x}(t)|dt\le\int_0^T dt\int_t^{t+h}\left|\widetilde{A}(s)\overline{x}(s)\right|ds+\int_0^T dt\int_t^{t+h}|N(s)c|ds+\int_0^T dt\int_t^{t+h}\left|\widetilde{f}(s,\overline{x}(s),c)\right|ds\le$$

$$\le\int_t^{t+h}ds\int_0^T\left|\widetilde{A}(t)\overline{x}(t)\right|dt+\int_t^{t+h}ds\int_0^T|N(t)c|dt+\int_t^{t+h}ds\int_0^T\left|\widetilde{f}(t,\overline{x}(t),c)\right|dt.$$

Пусть $L=\|\widetilde{A}(.)\|k_0+\|N(.)\|\delta_1+L_1''(\delta_1)\delta_1+L_2''(\delta_1)\cdot k_0$. После необходимых преобразований для любых $k<k_0$, $\delta\in(0,\delta_1]$ имеем $|\widetilde{x}(t+h)-\widetilde{x}(t)|<Lh$.

Число $\widetilde{\delta}$ выберем согласно равенству $\widetilde{\delta}=\dfrac{\varepsilon}{LT}$. Тогда для любой вектор-функции $\overline{x}(t)\in D(k)$, для любого $|h|<\widetilde{\delta}$ будет справедливо неравенство $\int_0^T|\widetilde{x}(t+h)-\widetilde{x}(t)|dt<\varepsilon$. Лемма доказана.

Выясним, при каких условиях справедливо равенство $\widetilde{x}(T)=0$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha+Nc+\int_0^T\widetilde{A}(s)\overline{x}(s)ds+\int_0^T\widetilde{f}(s,\overline{x}(s),c)ds=0 \qquad (3)$$

относительно переменных $\alpha, c$.

**Теорема 1.** Если матрица $N$ является неособенной, то существуют положительные числа $\delta', \delta'' \in (0, \delta_0]$, $k_0$ такие, что для любого $k_1 \in (0, k_0]$, любой вектор-функции $\bar{x}(t) \in D(k_1)$, любого вектора $\alpha \in W(\delta'')$ уравнение (3) имеет единственное решение во множестве $C(\delta')$.

Доказательство проводится методом сжатых отображений.

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1, то существует единственное управление $u(t)$, определяемое равенством $(*)$ и вектором $c \in C(\delta')$, при котором решение $x(t, \alpha, u(.))$ системы (1) удовлетворяет равенству $x(T, \alpha, u(T)) = 0$.

**Доказательство.** Так как оператор $F$ непрерывен, то по теореме о неподвижной точке нелинейного оператора [3] существуют $x^*(t) \in D(k_1),\ c^* \in C(\delta')$, удовлетворяющие равенству $x^* = F_{c^*} x^*$, то есть

$$x^*(t) = \alpha + \int_0^t \left( \widetilde{A}(s) x^*(s) + N(s) c^* + \widetilde{f}\left(s, x^*(s), c^*\right) \right) ds, \qquad x^*(T) = 0.$$

Следовательно, существует управление $u^*(t) = \varphi(t, x^*, c^*)$, при котором справедливо равенство $\dot{x}^* = A(t)x^* + B(t)u^* + f(t, x^*, u^*)$. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Юханова М.В.* Условия локальной управляемости нелинейных систем // Информатика и прикладная математика: межвузовский сборник научных трудов. – Рязань; РГУ, 2006. – С. 139–143.
2. *Сансоне, Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Иностр. лит-ра, 1954.
3. *Терёхин, М.Т.* Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 10 (449). – С. 37–42.



*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*



**УДК 517.938**



**М.В. Юханова**


# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ РЕКЛАМНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ТУРИСТИЧЕСКОЙ ФИРМЫ


В данной статье на основе теории локальной управляемости нелинейными системами дифференциальных уравнений решается вопрос об организации рекламной деятельности турфирмы.

Рассмотрим модель организации рекламной деятельности туристической фирмы [1]. Предположим, что туристическая фирма реализует в некотором регионе три вида туров с различным уровнем предоставляемых услуг, сопровождаемых соответствующей рекламой.

Динамику продаж путевок трех видов можно описать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{s}_1 = k_1 \upsilon_1 \left( 1 - \frac{s_1}{M_1} \right) - b_1 s_1,$$

$$\dot{s}_2 = k_2 \upsilon_2 \left( 1 - \frac{s_2}{M_2} \right) - b_2 s_2,$$

$$\dot{s}_3 = k_3 \upsilon_3 \left( 1 - \frac{s_3}{M_3} \right) - b_3 s_3, \tag{1}$$

где $k_i$ – коэффициент эффективности инвестиций $\upsilon_i(t)$ в рекламу, $s_i(t)$ – текущий объем продаж $i$-го продукта, который уменьшается с постоянным темпом $b_i > 0$ при отсутствии инвестиций, $M_i$ – максимально возможный объем продаж, $i = 1, 2, 3$.

Туристический бизнес является сезонным, то есть в период отпусков (май-октябрь) туристические фирмы реализуют большое количество путевок, подкрепляя их продажу обширной рекламой (это и рекламные ролики на телевидении, и всевозможные объявления, и красочные статьи в газетах и журналах, и различные акции и т.д.). В остальное же время турфирмам приходится прикладывать большие усилия, чтобы не работать в убыток. Перед руководством туристических фирм встает основная задача: как организовать деятельность фирмы, в том числе и рекламную на этот период, чтобы за это время фирма не понесла значительных потерь.

Стационарная точка математической модели (1) характеризует такую работу турфирмы, при которой получаемый от продажи путевок доход идет на самоокупаемость турфирмы (аренда, заработная плата персоналу, реклама и т.д.).

Стационарная точка дифференциальных уравнений (1) определяется следующими алгебраическими уравнениями:

$$k_1 \upsilon_1 \left( 1 - \frac{s_1}{M_1} \right) - b_1 s_1 = 0,$$

$$k_2 \upsilon_2 \left( 1 - \frac{s_2}{M_2} \right) - b_2 s_2 = 0,$$

$$k_3 \upsilon_3 \left( 1 - \frac{s_3}{M_3} \right) - b_3 s_3 = 0. \tag{2}$$

Предположим, что в начальный момент времени система находится в окрестности стационарной точки. Требуется так организовать рекламную деятельность турфирмы, чтобы в момент времени $T$ система находилась в стационарной точке.

Пусть $s = s_0$ удовлетворяет системе (2) при $\upsilon = \upsilon_0$. Тогда, положив $x = s - s_0$, $u = \upsilon - \upsilon_0$ система (0.1) примет вид

$$\dot{x}_1 = -x_1\left(\frac{k_1\upsilon_1^0}{M_1} + b_1\right) + u_1\left(k_1 - \frac{k_1 s_1^0}{M_1}\right) - \frac{k_1}{M_1}x_1u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_2\left(\frac{k_2\upsilon_2^0}{M_2} + b_2\right) + u_2\left(k_2 - \frac{k_2 s_2^0}{M_2}\right) - \frac{k_2}{M_2}x_2u_2,$$

$$\dot{x}_3 = -x_3\left(\frac{k_3\upsilon_3^0}{M_3} + b_3\right) + u_3\left(k_3 - \frac{k_3 s_3^0}{M_3}\right) - \frac{k_3}{M_3}x_3u_3. \tag{3}$$

Очевидно, что начальным условием для системы (3) будет условие $x(0) = \alpha$, где $\alpha$ выбирается произвольным образом из окрестности нуля, допустимыми управлениями будем считать вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $\left|u(.) - \upsilon_0\right| \le \delta_0$, $\delta_0$ – некоторое число. Ставится задача – найти управление, при котором в момент времени $T$ решение системы (3) удовлетворяет условию $x(T) = 0$.

Исследование данного вопроса будем проводить методом, изложенным в [2].

Пусть $b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{8}, k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = \frac{2}{3}, \quad k_3 = \frac{1}{4}, M_1 = 20, M_2 = 15, M_3 = 15.$ Тогда модель организации рекламной деятельности турфирмы примет вид

$$\dot{s}_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1\left(1 - \frac{s_1}{20}\right) - \frac{1}{6}s_1,$$

$$\dot{s}_2 = \frac{2}{3}\upsilon_2\left(1 - \frac{s_2}{15}\right) - \frac{1}{3}s_2,$$

$$\dot{s}_3 = \frac{1}{4}\upsilon_3\left(1 - \frac{s_3}{15}\right) - \frac{1}{8}s_3. \tag{4}$$

При $\upsilon_0 = colon\left(\frac{5}{18}, \frac{5}{16}, \frac{15}{43}\right)$ вектор $s_0 = colon\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ удовлетворяет системе (2). Будем проводить исследование модели в окрестности нуля при условии, что $s(0) = 0$. Пусть $s = s_0$, $u = \upsilon - \upsilon_0$, получим систему вида (1) из [2], в которой

$$A(t)=\begin{pmatrix} -\frac{25}{36} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{72} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{344} \end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix} \frac{12}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48}{25} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{54} \end{pmatrix},$$

$$f(t,x,u)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{40}x_1u_1 \\ -\frac{2}{45}x_2u_2 \\ -\frac{1}{72}x_3u_3 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $T=\frac{1}{2}$. Управление будем искать в виде $u(t)=\varphi(t,x,c)=$ $=S(t)x+R(t)c+\tilde{\varphi}(t,x,c)$, где в силу того, что размерности фазового вектора и управления совпадают, коэффициентами являются скалярные величины – $S(t)=0$, $R(t)=\frac{5}{16}$, $\tilde{\varphi}(t,x,c)=0$.

Заметим, что $1-\|A(.)\|T=1-\frac{25}{72}>0$.

Найдем матрицу $N=\int_0^T B(\xi)R(\xi)d\xi=\begin{pmatrix} \frac{3}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{864} \end{pmatrix}$, $\det N=\frac{13}{1920}$.

Тогда по теореме 2 существует единственное управление $u(t)$, при котором решение $x(t,\alpha,u(.))$ системы удовлетворяет равенству $x(T,\alpha,u(T))=0$.

Таким образом, нашли управление, при котором к моменту времени $T$ работа турфирмы стала стабильной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ухин, М.Ю.* Синтез приближенно-оптимального управления на дискретных моделях // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №7. – С. 75–87.

2. *Юханова, М.В.* Локальная управляемость при специальном виде допустимых управлений // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2007. – № 12. – С. 101–104.

*Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина*

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция журнала «Известия Российской академии наук. Дифференциальные уравнения» принимает для опубликования статьи по актуальным проблемам теории дифференциальных уравнений и ее приложениям, оформленные **в текстовом редакторе** Microsoft Word 95, 97, XP, 2003 с использованием редактора формул Microsoft Equations 3.0, и настоятельно просит авторов использовать при наборе статей следующие настройки.

**1. Параметры страницы.** Поля: верхнее – 30 мм, левое – 30 мм, правое – 40 мм, нижнее – 42 мм. Размер бумаги: А4 (210мм $\times$ 297мм). Источник бумаги: от края до нижнего колонтитула – 32 мм.

**2. Вставка.** Номера страниц: внизу от центра начиная с первой страницы.

**3. Формат/абзац.** Выравнивание: по ширине. Отступ первой строки основного текста: 0,5 см. Интервал: перед – 0 пт, после – 0 пт, междустрочный – одинарный. Для аннотации: отступ от левого края страницы – 6,6 см, отступ первой строки – 0,4 см.

**4. Формат/шрифт.** Шрифт: Times New Roman. Размер: 11 пт (аннотация, подписи под рисунками и название вуза, в котором выполнена работа – 10 пт). Начертание: полужирным – УДК, ФИО автора(ов), название работы, слова «определение», «задача», «теорема», «лемма», «доказательство», «аксиома», «пример», «список литературы», названия разделов статьи; курсивом – название вуза, в котором выполнена работа, ФИО авторов в списке литературы. Прописными: заголовок статьи, фраза «список литературы».

**5. Сервис/язык.** Расстановка переносов: автоматическая, без переносов в словах из прописных букв.

**6. Объект Microsoft Equations.** Формат/интервал: междустрочный интервал и расстояние между строками – 150 %, расстояние между столбцами – 50–100 %, высота верхнего индекса – 45 %, глубина нижнего индекса и высота верхнего преде-ла – 25%. Стиль/определить: переменная – наклонный, матрица-вектор – полужирный, строчные греческие, прописные греческие и символ – шрифт Symbol, остальные стили – шрифт Times New Roman, стиль «текст» – английский (США). Размер/определить: обычный – 12 пт, крупный индекс – 9 пт, мелкий индекс – 7 пт, крупный символ – 18 пт, мелкий символ – 12 пт.

**Рисунки, схемы и чертежи** следует выполнять в любом графическом редакторе, кроме встроенного в Microsoft Word, сохранять с расширением wmf, tif, gif, jpg, bmp, pcx и затем вставлять в текст статьи с помощью меню **Вставка/рисунок/из файла**. Можно использовать отсканированные чертежи, графики и фотографии, а также импортировать объекты MathCAD, Microsoft Excel, Maple. Если на графиках имеется несколько линий, то для их изображения необходимо использовать черный цвет и различное начертание (сплошная линия, пунктирная линия и т.д.). Все импортируемые объекты (рисунки, чертежи, графики и т.д.) должны быть высланы в адрес редакции дополнительно вместе с электронной копией статьи; каждый объ-ект – в отдельном файле.

**При наборе текста** следует оставить 4 пустых строки перед индексом УДК на первой странице, по одной пустой строке после: ФИО автора, названия, аннотации, текста, сведений о грантах и списка литературы.

В отдельную строку рекомендуется выносить формулы большого размера, нумеруемые формулы (нумерация – только для цитируемых в тексте формул). При этом формулы выравниваются по центру, а номера – по правому краю.

**Аннотация** должна содержать не более 10 строк с конкретной информацией о полученных результатах.

**Сведения о грантах** указываются (шрифт 10 пт, полужирный) после основного текста перед списком литературы.

**Список литературы** оформляется по приведенному ниже образцу. Источники нумеруются в порядке их упоминания в тексте.

**Статьи представляются в редакцию** в электронном виде по **E-mail**: dma@rspu.ryazan.ru и на бумаге формата А4 по адресу: 390000, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46, госуниверситет, кафедра математического анализа. (Статья должна быть подписана всеми авторами.) К статьям должны прилагаться **сведения о каждом авторе**:

фамилия, имя, отчество;
ученая степень, звание;
место работы, занимаемая должность;
адрес для переписки (с указанием почтового индекса);
телефон;
E-mail (обязательно).

**Публикация статей платная.** Сумма оплаты сообщается автору после приема статьи к опубликованию.

Образец оформления текста статьи приведен ниже. Кроме того, его электронный вариант с заданными настройками (кроме настроек редактора формул) размещен на сайте РГУ имени С.А. Есенина www.rspu.ryazan.ru на страничке кафедры математического анализа.

**Известия**
**Российской**
**академии**
**естественных**
**наук**

**Дифференциальные**
**уравнения**

**2007 · № 12**

## СОДЕРЖАНИЕ

**Редактор** Е.Н. Захарова
**Компьютерная верстка** Е.Ю. Лискина

Подписано в печать 05.10.07
Бумага офсетная
Формат 60×84/8
Гарнитура Times
Печать трафаретная
Усл. п. л. 14,18
Уч.-изд. л. 8,9
Поз. № 070
Тираж 130 экз.
Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина»

Редакция журнала
«Известия Российской академии естественных наук.
Дифференциальные уравнения»
390000, г. Рязань, ул. Свободы, 46

Отпечатано в редакционно-издательском центре
Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина
390023, г. Рязань, ул. Урицкого, 22

[4 пустых строки]

**УДК 517.91**

**А.В. Петров**

[1 пустая строка]

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

[1 пустая строка]

Для автономной системы дифференциальных уравнений с гладкой правой частью методом функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости нулевого решения.

[1 пустая строка]

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x), \qquad (1)$$

**Теорема**. Пусть выполняются условия….

………………..

**Доказательство**. Действительно [1], ….

………………..

**Пример**. Допустим, ……

[1 пустая строка]

**Работа выполнена при поддержке…**

[1 пустая строка]

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин, И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966.
2. *Коддингтон, Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: Ин. лит., 1958.
3. *Айзенгендлер, П.Г.* Об устойчивых особых периодических решениях неавтономных уравнений / П.Г. Айзенгендлер, Л.П. Оборин // Дифференциальные уравнения (качественная теория): межвузовский сборник научных трудов / Рязань; РГПИ, 1978. – № 11. – С. 3–15.
4. *Усачёв, Ю.В.* Рождение инвариантного тора из положения равновесия в случае выполнения условий соизмеримости // Дифференциальные уравнения. – 2003.– Т. 39. – С. 1434–1436.

[1 пустая строка]

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина*